
А. С. Кондратьев
Л. А. Ларченкова
А. В. Ляпцев

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2012

УДК 53 (076.2)

ББК 22.3

К64

Кондратьев А.С., Ларченкова Л.А., Ляпцев А.В. **Методы решения задач по физике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 312 с. — ISBN 978-5-9221-1365-6.

Книга посвящена систематическому изложению общих методов и подходов к решению физических задач, основанных на последовательном применении методологии физики. Особое внимание уделяется современным методам, которые сравнительно редко используются в обучении физике в средней школе. Каждый из представленных методов демонстрируется на большом количестве примеров из разных разделов курса физики.

Для преподавателей средней школы и вузов, а также для учащихся средней школы и студентов.

ISBN 978-5-9221-1365-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2012

© А. С. Кондратьев, Л. А. Ларченкова,
А. В. Ляпцев, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Современный подход к решению физических задач	7
1.1. Методологические основы решения физических задач	7
1.2. Математический аппарат при решении физических задач	13
1.3. Использование законов сохранения и изменения механической энергии и импульса	26
1.4. Использование методологических принципов	38
1.5. Условия задач и проверка полученных ответов	56
Глава 2. Механика	67
2.1. Кинематика материальной точки	67
2.2. Динамика	76
2.3. Законы сохранения энергии и импульса	89
2.4. Статика	108
2.5. Механика жидкостей и газов	119
2.6. Механические колебания и волны	128
Глава 3. Электродинамика. Оптика	139
3.1. Электростатика	139
3.2. Цепи постоянного тока	151
3.3. Работа и тепловое действие тока	163
3.4. Магнитное поле и электромагнитная индукция	172
3.5. Переменный ток и электромагнитные колебания и волны	179
3.6. Заряженные частицы в электрических и магнитных полях	187
3.7. Волновая и геометрическая оптика	197
Глава 4. Строение и свойства вещества	214
4.1. Газовые законы	214
4.2. Свойства жидкостей и твердых тел	230
4.3. Основы термодинамики	242
4.4. Кинетическая теория вещества	261
Глава 5. Релятивистская и квантовая физика	266
5.1. Релятивистская физика макроскопических тел	267
5.2. Квантовые явления	279
5.3. Основы физики атомного ядра	292
5.4. Элементарные частицы	299
Список литературы	311

Предисловие

Решение задач представляет собой неотъемлемую часть полноценного изучения физики на любом уровне — от первоначального школьного, вплоть до специального физического образования. Судить о степени понимания физических законов можно по умению их сознательно применять для анализа конкретных физических явлений, т. е. для решения задач. Умение определить, какие именно физические законы описывают рассматриваемое явление, как раз и свидетельствует о глубоком и всестороннем понимании физики. Но задачи в обучении физике должны играть еще одну, не менее значимую роль. Каждая задача должна давать повод для серьезного, пусть иногда и совсем краткого, разговора о сути физических явлений и законов, степени их общности, границах применимости, их места в общей картине мира.

Процесс решения физических задач должен быть похож на небольшое научное исследование со всеми присущими ему атрибутами — обоснованным выбором идеализации изучаемого процесса (физической модели), исследованием простых частных и предельных случаев, поиском и разбором аналогий с другими задачами и явлениями, а также сравнением методов их анализа. Методы решения задач зарождались в недрах физики как науки и поэтому опираются на ее методологию, отражают внутреннюю логику ее развития и демонстрируют сложившиеся подходы к решению научных проблем и анализу реальных явлений природы.

Их освоение является отправной точкой моделирования физических процессов и явлений и основой исследовательского отношения к действительности, но в принципе может быть реализовано уже на школьном уровне. Главным показателем эффективности получаемых знаний и умений выступает развитие у учащихся правильного стиля научного мышления и способности самостоятельно приобретать знания. Однако, если освоение методов решения задач предлагается проводить только путем изучения разнообразных образцов и примеров их применения, то без должного обобщения у многих учащихся не возникает ощущения значимости получаемых из решения задачи теоретических выводов и складывается калейдоскопическое впечатление о применяемых методах решения.

Предлагаемая монография, посвященная систематическому последовательному изложению общих методов и подходов к решению физических задач и демонстрирующая возможности получения теоретических обобщений на основе анализа конкретных ситуаций, должна помочь в решении этой проблемы и может быть полезной при разработке образовательных стандартов в области физического образования.

В первой главе рассматривается современный подход к решению физических задач, основанный на последовательном применении и сочетании трех уровней методологии физики — методологических принципов, фундаментальных физических законов и частных физических законов. Суть и нюансы проявления в действии каждого из представленных методов демонстрируются на большом количестве примеров из разных разделов курса физики. Особое внимание уделяется современным методам, используемым в физике, но в настоящее время практически отсутствующим в существующей учебной литературе, слабо представленным в методической периодике и сравнительно редко используемым в обучении физике в средней школе. Речь идет, прежде всего, о качественных методах анализа физических явлений, таких как метод анализа размерностей, метод физического подобия, применение соотношения неопределенностей для определения границ применимости классической физики и изучении свойств квантовых объектов.

Остальные главы посвящены особенностям применения рассмотренных подходов и методов в рамках конкретных раздела курса физики — механики, электродинамики, строения и свойств вещества, квантовой физики. Однако следует отметить, что не все явления поддаются классификации по разделам физики, поэтому ряд задач отнесен к определенному разделу по формальному виду их условия, но при их решении приходится затрагивать материал и других разделов. Но именно такие задачи и представляют наибольший интерес, поскольку с их помощью можно почувствовать единство физического мира, увидеть аналогию между совершенно разными по своей физической природе явлениями и найти общий язык для их описания.

Монография адресована преподавателям физики, прежде всего тем, кто использует, хотя бы частично, учебный комплект для школ и классов с углубленным изучением физики, состоящий из трехтомника, посвященного изложению теоретического материала (авторы Е. И. Бутиков, А. С. Кондратьев, В. М. Уздин), сборника задач (авторы А. С. Кондратьев, В. М. Уздин), пособия «Физика. Задачи на компьютере» (авторы А. С. Кондратьев, А. В. Ляпцев). Конечно же, эта книга может быть полезной для учащихся школ и студентов, которые хотят самостоятельно познакомиться с методами решения задач и освоить их применение.

Следует обратить особое внимание читателей на то, что монография посвящена именно методам решения задач, а не «методам обучения решению задач», что в учебно-методической литературе зачастую понимается как синонимы. Методы обучения решению задач, безусловно, опираются на сложившиеся современные научные подходы к анализу физических явлений и процессов, но нацелены на получение педагогического эффекта от применения задач в обучении и должны учитывать психологические аспекты восприятия учебного материала учащимися, возможные трудности его понимания и освоения, и способы их преодоления, и поэтому заслуживают отдельного рассмотрения.

Глава 1

СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1. Методологические основы решения физических задач

Опыт обучения физике в средней и высшей школе показывает, что наибольшую трудность для обучаемых представляет вопрос «с чего начать решение?», т.е. не само использование физических законов, а выбор, какие физические законы, и почему именно эти, следует применять при анализе каждого конкретного явления или процесса, рассматриваемого в условии задачи.

Как отмечается в [2], даже после успешного решения задачи значительная часть учащихся не может объяснить, почему использование именно данного физического закона приводит к поставленной цели и возможно ли решение данной задачи на основе использования других законов.

Пренебрежение этим аспектом в педагогической практике приводит к возникновению негативных психологических установок к решению задач, как источнику неудач, и приводит к формализму в знаниях. Учащиеся знают формулы и формулировки законов, а решить задачу не могут, или могут решить только типовую задачу по образцу и не знают, что делать при незначительном изменении условия задачи. Поэтому учителю очень важно иметь общее представление о возможных подходах к решению задач, своего рода «стратегию» действий, способную обеспечить возможность правильного решения, и обучать этому своих подопечных.

Процесс решения нетривиальной физической задачи похож на небольшое научное исследование. Как и в настоящем научном исследовании, далеко не всегда ясно, какие именно действия приведут к правильному результату именно в данной задаче, а какие действия в ней совершенно неуместны и, в лучшем случае, приведут к громоздкому нерациональному решению, а в худшем — вообще не позволят получить ответ на поставленные в условии задачи вопросы.

Согласно современным представлениям, можно выделить три основных уровня решения физической задачи [2, 3, 8, 9], которые и определяют необходимую стратегию действий.

Первый уровень характеризуется использованием конкретных (частных) физических законов, например, законов динамики при решении задач по механике. Как правило, решение задач на этом уровне требует использования более сложного или громоздкого математического аппарата, чем на последующих уровнях, хотя, вообще говоря, возможно использование и весьма элегантных математических методов, как например, векторного метода при решении задач по механике.

Второй уровень характеризуется использованием наиболее общих, фундаментальных физических законов, например таких, как законы сохранения. Как правило, на этом уровне используемый математический аппарат оказывается проще, чем при решении той же задачи на первом уровне. Основная трудность при решении задач на втором уровне — это создание качественной картины явления, которая позволяет записать уравнение соответствующего закона именно для рассматриваемого процесса.

Наконец, третий уровень решения физической задачи характеризуется использованием общих методологических принципов физики, таких как принципы симметрии, относительности, причинности, суперпозиции и т. д. При решении физической задачи на этом уровне иногда удастся строго получить ответ, вообще не выписывая никаких уравнений. Часто удастся сделать совершенно элементарные выкладки, которые были бы весьма громоздкими при решении задачи на других уровнях.

Ни одна задача относительно реальных явлений не решается точно. Всегда приходится пренебрегать влиянием каких-либо воздействий, которые мало существенны для рассматриваемого явления, т. е. строить его физическую модель. При этом необходимо проводить оценку роли отбрасываемых величин и определять границы применимости используемой физической модели. Вопросы построения физических моделей реальных явлений и оценки условий их справедливости играют определяющую роль в процессе решения задачи.

При решении физической задачи всегда следует попытаться взглянуть на нее с позиции указанных трех уровней. Прежде всего, следует попытаться «угадать» ответ из «общих соображений». Конструктивная деятельность «из общих соображений» как раз и соответствует осознанному (и в этом случае более продуктивному) или неосознанному (первые интуитивные шаги) обращению к общим методологическим принципам физики. Как правило, на этом уровне отсутствует явная детальная разработка физической модели рассматриваемого явления.

Здесь важно понимать, что может происходить или чего не может быть в рассматриваемой физической ситуации. Даже если таким путем удастся найти решение задачи, всегда полезно решить ее и более стандартным образом, апеллируя к наиболее общим, фундаментальным физическим законам. Использование фундаментальных законов сохранения (энергии, импульса, электрического заряда) иногда дает возможность найти ответы на вопросы, касающиеся тех явлений, для которых учащимся (а иногда, и вообще в науке!) неизвестны описывающие их конкретные законы.

При использовании законов сохранения уже требуется тщательная разработка физической картины (т.е. физической модели) рассматриваемого явления. Здесь необходимо проявлять особую внимательность, ибо иногда незначительное на первый взгляд изменение характера протекающего процесса может приводить к кардинальному изменению соответствующего проявления, и наоборот, иногда разным протекающим процессам могут соответствовать одни и те же законы сохранения и одинаковые, соответствующие им, уравнения. В этом случае встает проблема отбора нужных корней.

К решению физической задачи на первом уровне следует приступить в том случае, когда ни использование методологических принципов физики, ни применение фундаментальных законов сохранения не позволяют найти ответы на вопросы, поставленные в условии задачи. Физические модели явления, создаваемые при решении задачи на первом и втором уровнях, схожи между собой, однако степень необходимой детализации физической картины при решении задачи на первом уровне, как правило, выше, чем при решении на втором уровне. Естественно, что именно первый уровень используется при решении таких задач, в которых условия сформулированы таким образом, что явно указывают на использование конкретных частных физических законов.

Весьма полезным является использование графиков для объяснения полученных результатов, а иногда и для самого получения решения.

Решение физических задач, как правило, подразумевает получение не только качественного, но и количественного описания рассматриваемого явления. Это требует использования определенного математического аппарата, т.е. создания математической модели явления [11]. В простейших случаях создание математической модели сводится к «переводу» вербальной физической модели явления на математический язык и постановке корректной (а в некоторых случаях, и некорректной!) математической задачи в традиционном для математики смысле. Обычно математическая модель формируется в виде уравнения или системы уравнений или неравенств. На уровне средней школы непосредственный интерес представляют математические

модели, основанные на алгебраических и простых обыкновенных дифференциальных уравнениях (с разделяющимися переменными). Такие уравнения дополняются определенными граничными условиями в зависимости от вида уравнения.

В более сложных случаях этапы создания физической и математической моделей явления оказываются тесно переплетенными. Математические преобразования и вычисления встречаются в большинстве физических задач, и в этом смысле, решение большинства задач содержит этап математического моделирования. Решение наиболее трудных математических проблем в настоящее время требует синтеза методов алгебры, геометрии, анализа, а зачастую и использования компьютеров. При решении физических задач не следует стремиться получать чисто аналитическое или чисто геометрическое доказательство. Математические выкладки следует делать максимально компактными (разумеется, не в ущерб математической строгости), используя при этом все имеющиеся у учащихся математические познания из разных разделов математики.

Развитие математической культуры учащихся не менее важно для успешного обучения решению физических задач, чем развитие умения проводить анализ физической сути рассматриваемых явлений. Особенно важным это становится в условиях, когда возможно использование различных физических законов, описывающих изучаемое явление. Математические модели явления, получаемые при решении задач на разных уровнях методологии, как правило, совершенно различны. Особенно эффективной является замена дифференциальных уравнений, возникающих, например, при решении механических задач на первом уровне при переменных действующих силах, на алгебраические уравнения, фигурирующие при решении этих задач с использованием законов сохранения. Приведенные положения о структуре и роли математических моделей явления при решении физических задач соответствуют методологическим подходам современной математики и тенденциям в ее развитии.

Приступая к решению физической задачи, полезно проанализировать ее с точки зрения соображений размерности. При должном умении этот метод удастся иногда эффективно использовать при решении задач на различных уровнях методологии, особенно при решении сложных задач: указанные уровни методологии приходится использовать не «последовательно», в более сложных сочетаниях, когда в процессе решения выясняется необходимость обобщения или, наоборот, большей детализации первоначально выбранной физической модели явления.

Остановимся кратко на использовании метода размерностей при анализе физических явлений. При решении физических задач очень важно уметь наиболее компактным образом получить необходимые

оценки, не допуская громоздких, хотя и простых, решений систем алгебраических уравнений, возникающих при стандартном использовании этого метода.

Общая схема оптимального подхода к анализу размерностей заключается в следующем. Сначала устанавливается вид независимых безразмерных параметров, характеризующих рассматриваемую систему. В соответствии с так называемой π -теоремой, общий вид параметра с нужной размерностью получается умножением любого параметра с такой размерностью на некоторую функцию найденных независимых безразмерных параметров. Вид этой функции устанавливается с помощью некоторых частных или предельных случаев. Приведем конкретный пример.

Рассмотрим модель газа из электрически нейтральных молекул, взаимодействием которых между собой можно пренебречь, пока они не пришли в контакт друг с другом. Придя в контакт, молекулы взаимодействуют друг с другом как упругие шары при столкновениях.

Параметрами, определяющими свойства такой системы, будут масса молекулы m , их средняя концентрация n , температура, которая будучи умноженной на постоянную Больцмана обозначается как Θ и имеет размерность энергии, и некоторый параметр R с размерностью длины, характеризующий взаимодействие молекул между собой. Выпишем размерности этих параметров в системе единиц СИ:

$$[m] = M, \quad [n] = L^{-3}, \quad [\Theta] = ML^2T^{-2}, \quad [R] = L. \quad (1.1.1)$$

Строим безразмерный параметр Γ . Сразу видно, что в него не может входить Θ , так как не с чем сократить T . Но тогда в него не может входить и масса m , потому что не с чем сократить M . Из двух оставшихся параметров n и R можно построить только один независимый безразмерный параметр:

$$\Gamma = nR^3. \quad (1.1.2)$$

Теперь любой параметр с интересующей нас размерностью, например, времени, получается произведением какого-либо параметра с размерностью времени на некоторую функцию безразмерного параметра Γ . Легко сообразить (например, вспомнив формулы для характерных средних значений скоростей молекул газа), что таким параметром может быть

$$t = \frac{R}{\sqrt{\Theta/m}} f(\Gamma). \quad (1.1.3)$$

Исследование соотношения (1.1.3) позволяет выяснить очень много фактов относительно свойств такой физической системы. Мы пока ограничимся только одним из них: из выражения (1.1.3) строго следует, что любые характерные времена, соответствующие различным процессам в такой системе, определяются скоростями хаотического теплового

движения молекул $\sqrt{\Theta/m}$. Совершенно иная ситуация характерна для газа частиц, обладающих электрическим зарядом, то есть для плазмы. Будем для простоты считать, что подвижными являются только электроны, а гораздо более тяжелые ионы образуют неподвижный компенсирующий фон, обеспечивающий электронейтральность всей системы в целом. Видно, что эта система может быть описана теми же параметрами m , n и Θ , только параметр R теперь следует заменить на квадрат электрического заряда e^2 , определяющего вследствие закона Кулона взаимодействие между зарядами, простирающееся на бесконечное расстояние. Размерность для квадрата заряда можно установить с помощью закона Кулона $F = ke^2/r^2$, полагая в нем $k = 1$ (что соответствует системе единиц Гаусса). Тогда размерность

$$[e^2] = ML^3T^{-2}. \quad (1.1.4)$$

Теперь строим безразмерный параметр Γ из параметров m , n и Θ в (1.1.1) и параметра e^2 . Легко увидеть, что сократить теперь T можно только одним способом, составив отношение e^2/Θ . При этом сокращается и M , поэтому масса m не может входить в выражение для безразмерного параметра Γ . Остается только подобрать нужную степень n , чтобы сократить L , входящее в размерность отношения e^2/Θ . Таким образом, безразмерный параметр Γ равен

$$\Gamma = \frac{e^2 n^{1/3}}{\Theta}. \quad (1.1.5)$$

Несложно понять смысл этого параметра: это отношение потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов, находящихся на расстоянии $r = n^{1/3}$ друг от друга, к средней кинетической энергии Θ теплового движения. Параметр с размерностью времени теперь имеет вид

$$t = \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{\Theta/m}} f(\Gamma) = \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{\Theta/m}} f\left(\frac{e^2 n^{1/3}}{\Theta}\right). \quad (1.1.6)$$

Из выражения (1.1.6) следует, что в рассматриваемой системе существует параметр с размерностью времени, который не зависит от температуры Θ , а следовательно, и от скорости теплового движения зарядов. Действительно, выбирая функцию f в виде $f(\Gamma) = \Gamma^{-1/2}$, получаем для параметра t выражение

$$t = \sqrt{\frac{m}{e^2 n}}. \quad (1.1.7)$$

Это время оказалось независимым от скорости движения. Единственный случай в физике, когда характерное время не зависит от скорости, — это период гармонических колебаний. Таким образом, с помощью анализа размерностей удастся строго доказать, что в плазме

возможны гармонические колебания, и делается это без какого-либо анализа уравнений движения, которые здесь весьма сложны. Установить возможность колебаний в плазме можно с помощью простых качественных соображений, а возможность простого, но строгого доказательства их гармоничности является убедительным свидетельством эффективности метода анализа размерностей при анализе физических явлений.

Последующие четыре параграфа этой главы посвящены краткому изложению основных указанных выше методов процесса решения физических задач. Все сформулированные положения иллюстрируются на конкретных примерах, относящихся к различным разделам физики. Примеры, приведенные в этой главе, подобраны таким образом, чтобы в каждой задаче был показан в основном только один из изложенных приемов современного подхода к решению физических задач. При этом не рассматриваются задачи, само условие которых предполагает прямое решение на основе частных физических законов, даже если они относятся к области современной физики — строению атома, радиоактивности, ядерным реакциям и т. д. В последующих главах рассматриваются более сложные задачи, решение которых в той или иной степени отражает реальное научное исследование физических явлений.

1.2. Математический аппарат при решении физических задач

В подавляющем большинстве случаев при решении задачи в той или иной степени используется математический аппарат. Владение математическими навыками является не менее важным фактором, чем понимание физической сути рассматриваемых явлений. Основное требование, предъявляемое к используемому математическому аппарату, — это его адекватность рассматриваемому физическому явлению. При неудачном выборе математических методов насыщение решения задачи большим количеством необязательных или громоздких выкладок выглядит уродливо, и не менее неуместным является многословное объяснение некоторых моментов в случаях, когда их очевидность становится ясной при использовании простых формул.

В связи с этим требование использования наиболее простого из возможных математических методов является очень важным, что представляет собой одно из проявлений методологического принципа простоты в физике. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие приведенные положения.

Геометрические образы векторных уравнений

Задача 1.1. Тело падает без начальной скорости с высоты h на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, и упруго отражается от нее. На каком расстоянии вдоль наклонной плоскости тело второй раз ударится о нее?

Вектор перемещения тела $\mathbf{r}$ в поле тяготения Земли между первым и вторым столкновениями с наклонной плоскостью имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g} t^2}{2}, \quad (1.2.1)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость тела после первого отражения от наклонной плоскости, а t — время полета до второго столкновения с ней. Вследствие упругого характера столкновения

$$v_0^2 = 2gh. \quad (1.2.2)$$

Обычно решение векторного уравнения (1.2.1) проводится путем проектирования его на оси вводимой системы координат, что даже при наиболее удачном выборе направления осей (вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно ей) приводит к довольно громоздким преобразованиям. Наиболее простой и элегантный способ решения уравнения (1.2.1) заключается в построении его геометрического образа. Векторное равенство (1.2.1) соответствует треугольнику, показанному на рис. 1.1, а.

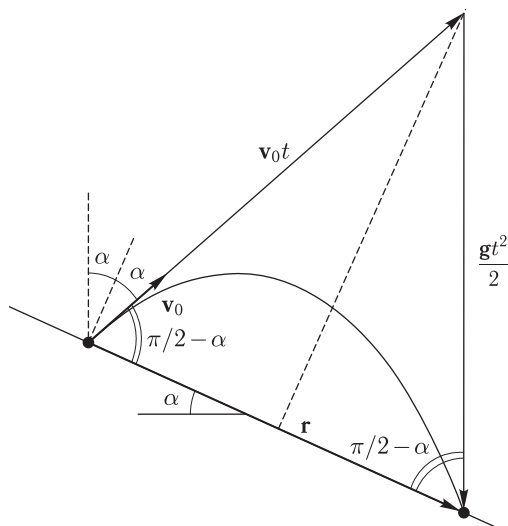


Рис. 1.1, а.

Треугольник строим следующим образом. Прежде всего, отмечаем равенство углов α , показанных на рисунке. Углы около точки первого столкновения тела с наклонной плоскостью равны в силу упругого отражения от нее. Один из этих углов равен углу, образуемому наклонной плоскостью с горизонтом, вследствие взаимной перпендикулярности сторон этих углов. Затем изображаем вектор $\mathbf{r}$, направленный вдоль наклонной плоскости из точки первого столкновения тела с плоскостью во вторую. Затем обозначаем направление вектора $\mathbf{v}_0 t$, начинающегося в точке первого столкновения, и направление вертикального вектора $\mathbf{gt}^2/2$, оканчивающегося в точке второго столкновения. Очевидно, что вектор $\mathbf{v}_0 t$ заканчивается, а вектор $\mathbf{gt}^2/2$ начинается в точке пересечения прямых, задающих направление этих векторов.

Теперь сразу видно, что построенный треугольник — равнобедренный, так как равны углы при основании треугольника, то есть углы, образованные векторами $\mathbf{v}_0 t$ и $\mathbf{gt}^2/2$ с наклонной плоскостью. Отсюда получаем равенство

$$v_0 t = \frac{gt^2}{2},$$

и для времени полета тела находим

$$t = \frac{2v_0}{g},$$

то есть, устанавливаем независимость этого времени от угла α , образуемого наклонной плоскостью с горизонтом. Для модуля вектора $\mathbf{r}$, то есть для искомого расстояния получаем выражение

$$r = 2v_0 t \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha = 8h \sin \alpha,$$

где мы воспользовались приведенными выражениями для t и v_0^2 .

Приведем для сравнения решение этой задачи путем проектирования векторного уравнения (1.2.1) на оси системы координат, показанной на рис. 1.1, б.

$$OX : r = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha t^2}{2},$$

$$OY : 0 = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Из второго уравнения получаем $t = 2v_0/g$, что после подстановки в первое уравнение дает с учетом соотношения (1.2.2) следующий результат:

$$r = 8h \sin \alpha.$$

Более громоздкими будут преобразования при выборе координатной системы с осями, направленными горизонтально и вертикально.

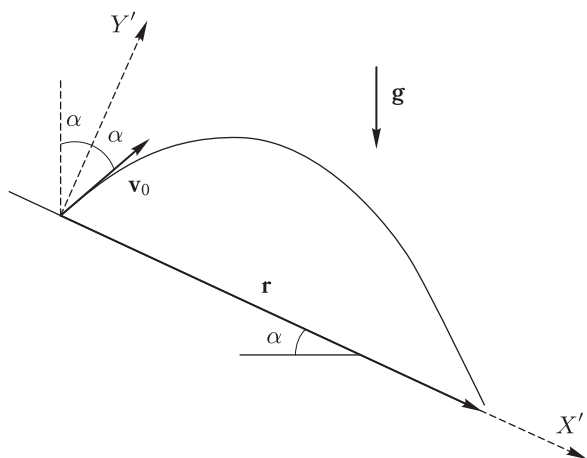


Рис. 1.1, б.

Примененный при решении этой задачи метод нахождения геометрического образа векторного уравнения может эффективно использоваться при решении различных задач, где физические законы записываются в векторном виде.

Однако в задачах, где требуется исследование траектории движения, метод проектирования может оказаться более удобным, позволяя сделать определенные качественные выводы о характере движения до решения получающихся уравнений.

Задача 1.2. *Требуется добросить тело до окна дома, расположенного на высоте h , не подходя к дому ближе, чем на расстояние S . При какой наименьшей начальной скорости это можно сделать? Под каким углом к горизонту при этом следует бросить тело?*

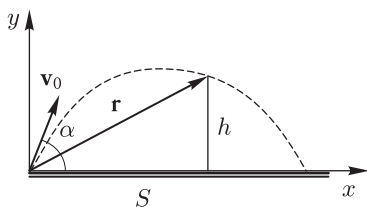


Рис. 1.2.

На первый взгляд может показаться, что наименьшая начальная скорость будет в том случае, когда окно совпадает с высшей точкой траектории полета тела. Однако, даже не решая задачи, можно увидеть, что это не так. Действительно, будем уменьшать высоту h , на которой расположено окно, не меняя расстояние S до дома от точки бросания тела.

Тогда окно будет оставаться высшей точкой траектории, лежащей на ее середине даже при $h \rightarrow 0$. Но совершенно очевидно, что при $h = 0$ достаточно просто добросить тело до окна. Поэтому оптимальная

траектория полета тела должна при $h = 0$ заканчиваться в точке расположения окна, то есть должна иметь вид, показанный на рис. 1.2.

В данной задаче удобнее не находить геометрический образ векторного уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g} t^2 / 2,$$

описывающего полет тела, а исследовать траекторию полета, которую можно получить, спроектировав это векторное уравнение на горизонтальную и вертикальную координатные оси:

$$OX : S = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

$$OY : h = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2}.$$

Выражая время полета t из первого уравнения и подставляя его во второе, получаем

$$h = S \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{S^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

перепишем это уравнение в виде

$$h = S \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g S^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1.2.3)$$

Строго говоря, физический этап решения задачи на этом закончен, и перед нами чисто математическая задача.

Формальный математический прием решения этой задачи заключается в выражении начальной скорости v_0 из уравнения (1.2.3) как функции угла α и исследовании этой функции на экстремум, что требует знания дифференциального исчисления. Существует, однако, простой элегантный способ получения результата, основанный на привлечении физических соображений.

Рассматривая выражение (1.2.3) как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 v_0^2}{g S} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 v_0^2 h}{g S^2} + 1 = 0,$$

найдем его корни:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g S} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 S^2} - \frac{2 v_0^2 h}{g S^2} - 1}. \quad (1.2.4)$$

Физический смысл имеет только вещественное значение $\operatorname{tg} \alpha$, что немедленно приводит к условию неотрицательности дискриминанта:

$$v_0^4 - 2v_0^2 hg - g^2 S^2 \geq 0.$$

Элементарное исследование этого неравенства показывает, что минимальное значение v_0^2 , при котором оно справедливо, соответствует знаку равенства. Таким образом, решая биквадратное уравнение для $v_{0\min}^2$, находим

$$v_{0\min}^2 = g \left(h + \sqrt{h^2 + S^2} \right),$$

откуда

$$v_{0\min} = \sqrt{g \left(h + \sqrt{h^2 + S^2} \right)}. \quad (1.2.5)$$

Угол, под которым должна быть направлена минимальная начальная скорость $v_{0\min}^2$, определяется с помощью выражения (1.2.4). Учитывая, что минимальная начальная скорость соответствует равенству нулю дискриминанта, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{0\min}^2}{gS} = \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S}. \quad (1.2.6)$$

Полученный результат удовлетворяет очевидным предельным случаям. При $h = 0$ достаточно просто добросить тело до окна, находящегося на расстоянии S . Минимальная начальная скорость при этом равна $\sqrt{gS}$ и направлена под углом $\pi/4$ к горизонту. Из выражений (1.2.5) и (1.2.6) получаются именно такие значения.

При $S = 0$ тело нужно бросать вертикально вверх ($\alpha = \pi/2$) с начальной скоростью $\sqrt{2gh}$, обеспечивающей подъем на высоту h . Именно такие значения получаются из (1.2.5) и (1.2.6) при $S = 0$.

Тригонометрические тождества

Как уже было видно из решения разобранных примеров, в математический инструментарий, необходимый для решения физических задач, входят тригонометрические тождества. Приведем примеры, где использование тригонометрических тождеств делает преобразования компактными или позволяет наиболее четко выявить физический смысл полученного результата.

Задача 1.3. На какое максимальное расстояние вверх вдоль наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом, можно забросить тело, если его начальная скорость равна v_0 ? Под каким углом α к наклонной плоскости его следует бросать в таком случае?

Уравнение движения тела имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g} t^2}{2},$$

где $\mathbf{r}$ — перемещение тела вдоль наклонной плоскости, а t — время падения тела до падения на наклонную плоскость. Решать это уравнение в данной задаче удобно, исследуя его геометрический образ, показанный на рис. 1.3, *а*, который строится таким же образом, как и в задаче 1.1.

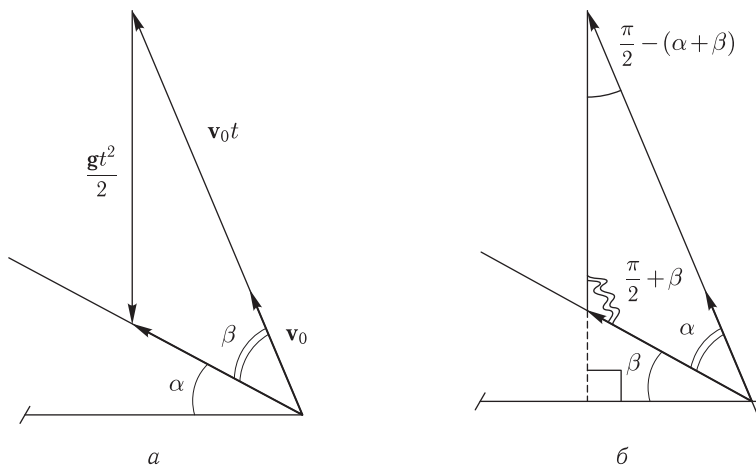


Рис. 1.3.

Прежде всего, из геометрических соображений устанавливаем значения углов в образованном треугольнике. Это легко делается с помощью второй диаграммы на рис. 1.3, *б*, где горизонталь проводится через точку бросания тела. Угол, показанный двумя волнистыми дужками, устанавливается из условия, что сумма углов треугольника равна π , после того, как определены два других угла. Теперь теорема синусов приводит к следующим равенствам:

$$\frac{v_0 t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{gt^2}{2 \sin \alpha} = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)},$$

которые с помощью тригонометрических формул приведения можно переписать в виде

$$\frac{v_0 t}{\cos \beta} = \frac{gt^2}{2 \sin \alpha} = \frac{r}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Выражая t из первого равенства,

$$t = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta},$$

и подставляя во второе, получаем

$$r = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta}.$$

Используя тригонометрическое тождество для произведения синуса одного угла на косинус другого,

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)),$$

получим более удобное для исследования выражение для r :

$$r = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin(2\alpha + \beta) - \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \quad (1.2.7)$$

в котором учтено, что $\sin(-\beta) = -\sin \beta$.

Теперь остается только найти максимум выражения (1.2.7). Угол β задан по условию задачи. Поэтому максимальное значение получается при $\sin(2\alpha + \beta) = 1$. Отсюда следует, что:

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}. \quad (1.2.8)$$

Поскольку β не может превышать значения $\pi/2$, то решение, даваемое выражением (1.2.8), всегда существует. Максимальное значение $r_{\max}$ в соответствии с (1.2.8) равно:

$$r_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1 - \sin \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, его можно переписать в виде

$$r_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \sin \beta}. \quad (1.2.9)$$

Полученный ответ удовлетворяет очевидному предельному случаю: при $\beta = 0$ тело бросают над горизонтальной поверхностью. Из соотношений (1.2.8) и (1.2.9) при этом следуют хорошо известные значения α и максимальной дальности полета в этом случае.

Задача 1.4. Объясните, почему условие неискаженной передачи радиоволны модулированного сигнала $A(t) \cos \omega t$ и условие отсутствия помех в приемном устройстве взаимно противоречивы. Рассмотрите простейший случай, когда $A(t) = A_0(1 + \cos \Omega t)$.

Условие отсутствия помех в приемном устройстве от других передатчиков выполнено тем лучше, чем уже частотная полоса пропускания

этого устройства. При этом отсекаются посторонние радиосигналы, которыми заполнен эфир.

Для неискаженного приема передаваемого сигнала полоса пропускания приемного устройства должна обеспечить прохождение «модулированной амплитуды» $A(t) = A_0(1 + \cos \Omega t)$. Воспользовавшись тригонометрической формулой для произведения косинусов двух углов,

$$\cos(\Omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t),$$

перепишем этот сигнал в следующем виде:

$$A_0(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t = A_0 \left(\cos \omega t + \frac{1}{2} (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t) \right).$$

Видно, что модулированный указанным образом сигнал эквивалентен трем немодулированным гармоническим сигналам с частотами ω , $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$, причем постоянная амплитуда A_0 первого из них вдвое превышает амплитуды $A_0/2$ двух других сигналов. Обычно $\Omega \ll \omega$, и ширина полосы пропускания приемного устройства должна быть не уже, чем 2Ω , когда производится его настройка на «несущую» частоту ω . В противном случае принятый сигнал будет искажен. В действительности современные приемные устройства позволяют сузить полосу пропускания до Ω , поскольку они устроены таким образом, что сами воспроизводят вторую гармонику, например, на частоте $\Omega + \omega$, если принятый сигнал на частоте $\omega - \Omega$ (при условии, что само приемное устройство настроено на частоту ω).

Комплексные числа

Замена векторных диаграмм для токов и напряжений алгебраическими соотношениями, основанными на использовании комплексных чисел, позволяет более просто рассматривать цепи переменного тока.

Задача 1.5. Запишите закон Ома для последовательной цепи, содержащей активное сопротивление R , конденсатор с емкостью C и дроссель с индуктивностью L , к концам которой приложено переменное синусоидальное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$.

Схема электрической цепи показана на рис. 1.5, а.

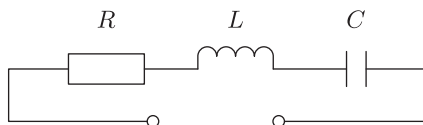


Рис. 1.5, а.

Приложенное напряжение U в любой момент времени равно сумме напряжений U_R на сопротивлении R , U_L на индуктивности L и U_C

на емкости C . Однако мгновенные значения U_L и U_C и приложенного напряжения U не пропорциональны мгновенному значению силы тока I в цепи. Такая пропорциональность имеет место только для I и U_R . Напряжение на дросселе опережает ток по фазе на $\pi/2$, а напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\pi/2$. Эта ситуация характеризуется векторной диаграммой, показанной на рис. 1.5, б. Вся диаграмма как целое вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через начало векторов перпендикулярно плоскости рисунка.

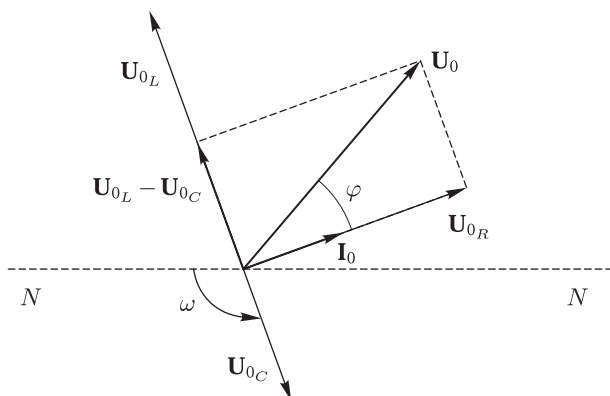


Рис. 1.5, б.

Мгновенные значения величин I , U_R , U_L , U_C и U получаются проектированием соответствующих векторов на направление NN , вдоль которого направлен вектор U_0 в момент времени $t = 0$. Амплитудное значение тока в цепи I_0 и угол φ , на который ток в цепи отстает от приложенного напряжения, определяются соотношениями

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (1.2.10)$$

а мгновенные значения U и I даются формулами

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad I = I_0 \sin (\omega t - \varphi). \quad (1.2.11)$$

Соотношения (1.2.11) означают, что закон Ома для рассматриваемой цепи невозможно сформулировать, используя вещественные числа. Однако это можно сделать с помощью комплексных чисел, задавая с их помощью положение векторов (т.е. координаты концов векторов) на приведенной диаграмме в произвольный момент времени t . Для

вектора U_0 , используя тригонометрическую форму комплексного числа, очевидно, имеем

$$\tilde{U} = U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Аналогично для вектора I_0 справедливо выражение

$$\tilde{I} = I_0 (\cos (\omega t - \varphi) + i \sin (\omega t - \varphi)).$$

По правилу деления комплексных чисел имеем

$$Z = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_0}{I_0} (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.2.12)$$

Постоянное, как видно из соотношения (1.2.11), число Z можно назвать комплексным сопротивлением цепи, потому что с его помощью равенству (1.2.11) можно придать вид закона Ома для участка цепи:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{Z}.$$

Модуль комплексного числа Z , как следует из (1.2.10) и (1.2.12) равен

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Аргумент числа Z , равный углу φ , определяется равенством, которое можно получить, переходя от тригонометрической к алгебраической форме комплексного числа и учитывая (1.2.10):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1.2.13)$$

Отсюда следует, что комплексное сопротивление Z для рассматриваемой последовательной цепи можно записать в виде

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Это означает, что элементам R , L и C цепи соответствуют комплексные сопротивления переменному току по следующим правилам:

$$R \rightarrow R, \quad L \rightarrow i\omega L, \quad C \rightarrow \frac{1}{i\omega C},$$

после чего находить комплексное сопротивление всей цепи можно по правилам цепей постоянного тока.

Задача 1.6. Цепь переменного тока состоит из параллельно соединенных резистора с сопротивлением R и конденсатора с емкостью C . К концам цепи приложено напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Определите сдвиг фазы между приложенным напряжением и током в неразветвленной части цепи.

Ток в неразветвленной части цепи определяется вторым из соотношений (1.2.11):

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Комплексное сопротивление переменному току Z при параллельном соединении резистора сопротивлением R и конденсатора с емкостью C определяется соотношением

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C,$$

откуда

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega RC}.$$

Приведя это равенство к каноническому виду, получаем

$$Z = \frac{R - i\omega CR^2}{1 - \omega^2 C^2 R^2}.$$

Тангенс угла отставания по фазе тока от напряжения имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = -\omega CR.$$

Знак минус в этом выражении означает, что в рассматриваемой цепи ток опережает напряжение. Полученный результат можно проверить с помощью векторной диаграммы токов и напряжений, которая показана на рис. 1.6. В данном случае $U_R = U_C = U$, I_R

находится в фазе с приложенным напряжением, а I_C опережает напряжение на $\pi/2$.

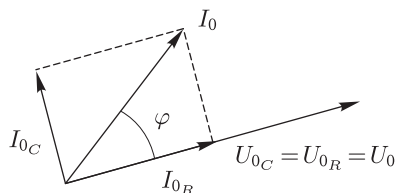


Рис. 1.6.

Видно, что ток действительно опережает напряжение, и при записи выражения для тока в виде (1.2.11) $\operatorname{tg} \varphi$ и сам угол φ следует считать отрицательным в соответствии со второй формулой (1.2.10).

Метод математической индукции

Один из самых совершенных методов математических доказательств — метод математической индукции. Использование этого метода при решении определенного вида физических задач позволяет делать рассуждения строгими в математическом смысле и часто помогает обойтись без громоздких вычислений, делая выкладки максимально компактными. По своей сути этот метод идеально приспособлен для доказательства справедливости утверждений и формул, которые могут быть угаданы или предположены из интуитивных соображений.

Задача 1.7. Найдите положение центра масс невесомой штанги с насаженными на нее n шарами, массы которых образуют арифметическую прогрессию $1, 2, 3, \dots, n$ кг, причем центры шаров находятся на одинаковом расстоянии d друг от друга (рис. 1.7).

Рассмотрев случай двух шаров, легко убедиться, что центр масс такой системы находится на расстоянии двух третей длины штанги, считая от ее легкого конца. Предположим, что это справедливо и в общем случае n шаров, т.е. расстояние x_n до центра масс равно $2/3$ длины штанги $L_n = d(n - 1)$. Равнодействующая сил тяжести n шаров приложена в этой точке.

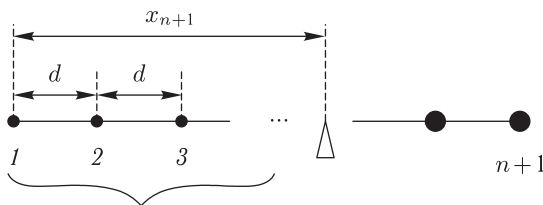


Рис. 1.7.

Добавим к штанге еще один $(n + 1)$ шар с массой $(n + 1)$ кг и найдем расстояние x_{n+1} до нового центра масс системы $(n + 1)$ шаров. Длина штанги теперь стала равной $L_{n+1} = nd$, и условие равновесия сил тяжести относительно нового центра масс имеет вид

$$\frac{n(n+1)}{2} \left(x_{n+1} - \frac{2}{3}(n-1)d \right) = (n+1) \cdot (nd - x_{n+1}),$$

Откуда

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}nd = \frac{2}{3}L_{n+1}.$$

Решение задачи без использования метода математической индукции более громоздко. Для штанги из n шаров условие равновесия сил тяжести относительно легкого конца имеет вид

$$\frac{n(n+1)}{2}x_n = 2d + 3 \cdot 2d + 4 \cdot 3d + \dots + n(n-1)d.$$

Теперь нужно просуммировать стоящую в правой части равенства последовательность, например,

$$\frac{n(n+1)}{2}x_n = d(1^2 + 2^2 + \dots + n^2 - 1 - 2 - \dots - n).$$

Для суммы квадратов получим

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

а для суммы первых степеней $n(n+1)/2$. Подставляя эти значения в предыдущее равенство, находим положение центра масс:

$$x_n = \frac{2}{3}(n-1)d = \frac{2}{3}L_n.$$

1.3. Использование законов сохранения и изменения механической энергии и импульса

Законы сохранения почти всегда позволяют существенно упростить используемый математический аппарат и сократить необходимые преобразования, особенно в тех случаях, когда динамическое решение задачи приводит не к алгебраическим, а к дифференциальным уравнениям. В некоторых случаях использование законов сохранения позволяет проанализировать и описать явления, для которых учащимся не известны динамические законы.

Задача 1.8. В однородном стержне распространяется продольная волна с плоским фронтом. Найдите скорость ее распространения.

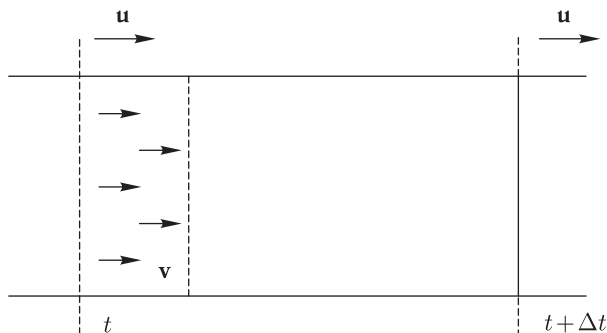


Рис. 1.8.

Распространение механических волн возможно в упругих средах. Если пренебречь затуханием волны, то в таких системах сохраняются механическая энергия и импульс, и нужно только правильно составить соответствующие уравнения.

Пусть в некоторый момент времени t фронт волны, распространяющейся со скоростью u , занимает некоторое положение, показанное на рисунке, а спустя промежуток времени Δt перемещается в новое положение. За это время частицы стержня, которые волна приводит в движение со скоростью v , успевают переместиться из сечения, где фронт волны был в момент времени t , в новое положение, показанное на рисунке. Промежуток времени Δt выбирается настолько малым,

чтобы сместившиеся из положения равновесия частицы стержня можно было считать движущимися с постоянной скоростью v . В результате часть стержня длиной $l = u\Delta t$ оказывается сжатой на величину $\Delta l = v\Delta t$. Используя закон Гука для упругой деформации, имеем

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{u} = \frac{F}{SE}, \quad (1.3.1)$$

где S — площадь поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, и F — сила упругости, возникающая при деформации стержня. Для силы F из (1.3.1) имеем

$$F = SE \frac{v}{u}. \quad (1.3.2)$$

Под действием этой внешней (по отношению к рассматриваемому участку стержня длиной $l = u\Delta t$) силы за время Δt выделенный участок стержня приобретает импульс Δp , равный

$$\Delta p = \rho S l v = \rho S u v \Delta t,$$

где ρ — плотность материала стержня.

По закону изменения импульса имеем

$$F \Delta t = \Delta p,$$

или, подставляя сюда найденные выражения для всех величин,

$$SE \frac{v}{u} \Delta t = \rho S v u \Delta t,$$

откуда для скорости распространения продольных волн находим

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.3.3)$$

Для получения этого выражения нам не потребовалось уравнение распространения волн, мы проследили только за изменением импульса системы.

Результат (1.3.3) можно получить и рассматривая происходящие при распространении волн энергетические превращения. При деформации стержня потенциальная энергия деформации равна

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{F \Delta l}{2}.$$

Подставляя сюда выражение для силы F и деформации Δl , переписываем это равенство в виде

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{1}{2} SE \frac{v}{u} v \Delta t.$$

Движению частиц выделенной части стержня со скоростью v соответствует кинетическая энергия ΔW_k , равная

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \rho S l v^2 = \frac{1}{2} \rho S u v^2 \Delta t.$$

Изменение механической энергии ΔW , равное сумме ΔW_k и ΔW_n , определяется работой внешней силы F на перемещении $\Delta l = v \Delta t$. В результате приходим к равенству

$$F \Delta l = \Delta W_n + \Delta W_k,$$

или

$$S E \frac{v}{u} v \Delta t = \frac{1}{2} S E \frac{v}{u} v \Delta t + \frac{1}{2} \rho S u v^2 \Delta t,$$

откуда для u получаем прежнее выражение (1.3.3).

Задача 1.9. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r поставили на зарядку, подав на его клеммы напряжение U . Какой будет сила тока в цепи, если сопротивление соединительных проводов равно R ?

Для ответа на вопрос задачи не обязательно знать закон Ома для неоднородного участка цепи, достаточно только разобраться в происходящих энергетических превращениях.

Действительно, в аккумуляторе и в соединительных проводах джоулево тепло выделяется за счет работы, которая совершается в данной цепи электрическим полем, создаваемым зарядным устройством, и сторонними силами аккумулятора $A_{эл} + A_{стор} = Q$.

Учитывая, что работа сторонних сил при зарядке аккумулятора будет отрицательна (при зарядке «+» аккумулятора соединен с «+» источника напряжения, и ток через аккумулятор протекает в направлении, противоположном по сравнению с процессом, когда аккумулятор является источником тока), получаем выражение

$$U I \Delta t - \mathcal{E} I \Delta t = I^2 (R + r) \Delta t,$$

откуда немедленно следует ответ:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{R + r}.$$

Таким образом, используя только закон сохранения энергии, мы получили частный случай закона Ома для неоднородного участка цепи, когда фигурирующая ЭДС «мешает» приложенному напряжению создавать ток в цепи.

Даже когда динамические законы, определяющие рассматриваемый процесс, известны, предпочтительнее использовать законы сохранения для сокращения необходимых выкладок, что видно уже на примере следующей простейшей задачи.

Задача 1.10 Поезд массой m движется по горизонтальной поверхности со скоростью v , и затем останавливается под действием постоянной силы, пройдя путь S после начала действия тормозящей силы. Какова величина F тормозящей силы?

При динамическом решении этой задачи придется найти ускорение с помощью второго закона Ньютона $a = F/m$, а затем воспользоваться кинематическим соотношением $2aS = v^2$. Собирая вместе эти выражения, находим $F = mv^2/2S$.

Используя закон изменения кинетической энергии, мы прямо приравняем работу тормозящей силы изменению энергии поезда,

$$-FS = 0 - \frac{mv^2}{2},$$

получая тот же результат быстрее.

Можно воспользоваться и законом изменения импульса. Учтывая, что при постоянном ускорении средняя скорость движения $v_{\text{ср}} = S/t = v/2$, приравняем импульс тормозящей силы изменению импульса поезда за время t :

$$-Ft = 0 - mv, \quad -F \frac{2S}{v} = -mv,$$

также получаем прежний результат.

В случае действия переменных сил использование законов сохранения представляет собой единственный путь исследования динамических систем на доступном для учащихся средней школы уровне.

Задача 1.11. На концах длинной нити подвешены грузы массой m каждый. Нить перекинута через два легких маленьких блока, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга. К ней посередине между блоками прикреплен груз массой m . В начальный момент времени нить между блоками горизонтальна, и вся система неподвижна. Трение отсутствует. Как будут двигаться грузы? Какова максимальная скорость их движения? Считать, что есть направляющий стержень, обеспечивающий движение центрального груза по вертикали.

Начальное положение системы, показанное на рисунке пунктиром, не является положением равновесия. Груз, подвешенный между блоками, будет опускаться, а боковые грузы — подниматься. Натяжение нити в каждый момент времени одинаково по всей ее длине. Нетрудно убедиться, что существует положение равновесия системы, когда модуль силы натяжения нити $F = mg$, а угол α равен $\pi/6$. Однако, опускаясь вниз, центральный груз проскочит это положение равновесия, потом, в конце концов, остановится и начнет подниматься вверх. Возникнут

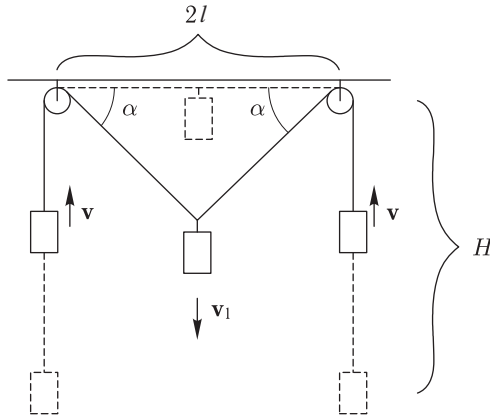


Рис. 1.11, а.

незатухающие колебания, если в системе отсутствует диссипация механической энергии.

В начальный момент времени по условию задачи полная механическая энергия E системы — это потенциальная энергия

$$E = E_{п0} = -2mgH,$$

если считать нулевым уровнем горизонтальную нить между блоками. При произвольном угле α , учитывая нерастяжимость нити, можно выражение для потенциальной энергии системы записать в виде

$$E_{п} = -2mg \left(H - l \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) - \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (1.3.4)$$

В точке остановки центрального груза после прохождения положения равновесия потенциальная энергия снова будет равна полной энергии. Отсюда получаем уравнение для определения угла α_0 , при котором это произойдет:

$$-2mg \left(H_0 - l \left(\frac{1}{\cos \alpha_0} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \right) = -2mgH_0.$$

Приводя подобные члены и упрощая полученное выражение, приходим к тригонометрическому уравнению

$$2 - \sin \alpha_0 - 2 \cos \alpha_0 = 0, \quad (1.3.5)$$

которое можно решать с помощью подстановок, используя тождества:

$$\sin \alpha_0 = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)}.$$

Корни получающегося квадратного уравнения для $\operatorname{tg}(\alpha_0/2)$ равны:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Первый корень $\alpha_0 = 0$ соответствует начальному положению системы, а второй корень $\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ соответствует максимальному опусканию центрального груза h , которое, как видно из рис. 1.11, а равно $h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$.

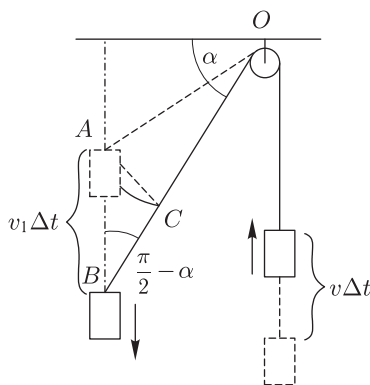


Рис. 1.11, б.

Максимальная скорость движения соответствует моменту прохождения системой положения равновесия, т. е. реализуется при $\alpha = \pi/6$. Для нахождения этой величины нужно связать между собой скорость v_1 центрального груза и скорость v боковых грузов. В силу условия нерастяжимости нитей $AO = OC$, а укорочение свисающей нити и удлинение наклонной нити за блоком одинаковы, $BC = v \Delta t$ (см. рис. 1.11, б). При малых Δt в треугольнике ABC угол C можно считать прямым, а следовательно, с другой стороны $BC = v_1 \Delta t \sin \alpha$, откуда получаем

$$v = v_1 \sin \alpha.$$

Кинетическая энергия системы в момент, когда угол наклонной части нити с горизонтом равен α , равна

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} + mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 (1 + 2 \sin^2 \alpha). \quad (1.3.6)$$

На основании закона сохранения механической энергии с помощью выражений (1.3.4) и (1.3.6) приходим к уравнению

$$-2mg \left(H - l \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \right) + \frac{1}{2}mv_1^2 (1 + 2 \sin^2 \alpha) = -2mgH,$$

решая которое относительно v_1^2 , получаем

$$v_1^2 = 2gl \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2}{\cos \alpha (2 \sin^2 \alpha + 1)}. \quad (1.3.7)$$

Подставляя сюда значение $\sin \alpha = 1/2$, соответствующее положению равновесия, получаем для квадрата скорости среднего груза, при прохождении этого положения,

$$v_{1\max}^2 = \frac{4}{3}gl (2 - \sqrt{3}).$$

Легко видеть, что, выражение (1.3.7) соответствует условию остановки груза в нижней точке, определяемому уравнением (1.3.5).

Отметим, что, проверяя правильность решения, можно убедиться, что минимум потенциальной энергии системы, даваемой формулой (1.3.4), приходится на значение угла $\alpha = \pi/6$, т.е. на положение равновесия. Для этого следует приравнять нулю производную по α выражения для потенциальной энергии (1.3.4).

Приведем пример, когда использование закона сохранения энергии при рассмотрении электромагнитных явлений позволяет обойтись без знания конкретных физических законов, описывающих рассматриваемое явление.

Задача 1.12. В электрической цепи включены последовательно источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением, реостат с начальным сопротивлением R_0 и катушка индуктивности с индуктивностью L . В цепи идет установившийся ток I_0 . Сопротивление реостата начинают изменять таким образом, чтобы ток в цепи уменьшался с заданной постоянной скоростью $\Delta I/\Delta t$. Каково сопротивление реостата R спустя промежуток времени t после начала изменения тока в цепи?

«Динамическое» решение этой задачи проводится следующим образом. При изменении тока через катушку индуктивности в ней возникнет ЭДС самоиндукции, равная

$$\mathcal{E}_{is} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

и ток в цепи в интересующий нас момент времени определяется выражением

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{is}}{R} = \frac{\mathcal{E} + L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|}{R}, \quad (1.3.8)$$

где $|\Delta I/\Delta t|$ — модуль скорости изменения тока в цепи. Знак плюс в числителе (1.3.8) соответствует уменьшению тока в цепи. По условию задачи ток в цепи убывает с постоянной скоростью, поэтому

в произвольный момент t после начала его уменьшения вплоть до обращения в нуль ток дается выражением

$$I = I_0 - \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| t.$$

Значение установившегося тока I_0 в цепи равно

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0}.$$

С помощью приведенных соотношений получим

$$R = \frac{\mathcal{E} + L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|}{\frac{\mathcal{E}}{R_0} - \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| t}.$$

В приведенном решении использовались закон Ома для замкнутой последовательной цепи и закон электромагнитной индукции Фарадея. Однако ее можно решить без использования этих законов, только с помощью закона сохранения энергии.

В установившемся режиме создаваемое катушкой индуктивности магнитное поле обладает энергией

$$W_0 = \frac{LI_0^2}{2}.$$

При уменьшении тока в цепи энергия магнитного поля также убывает, ее значение в любой момент времени равно

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Выделяющееся в системе тепло определяется как работой, совершаемой источником тока, так и уменьшением энергии магнитного поля. Уравнение, соответствующее закону сохранения энергии, записываем в виде

$$I\mathcal{E}\Delta t + \Delta W = I^2 R \Delta t, \quad (1.3.9)$$

где ΔW — модуль изменения энергии магнитного поля за промежутки времени Δt :

$$\Delta W = \frac{LI^2}{2} - \frac{L(I - |\Delta I|)^2}{2} \approx LI|\Delta I|,$$

где $|\Delta I|$ — уменьшение значения тока в цепи за время Δt , слагаемым $L(\Delta I)^2/2$, малым по сравнению с $LI|\Delta I|$, пренебрегаем.

Теперь с помощью уравнения (1.3.9) приходим к соотношению (1.3.8). Обратим особое внимание на то, что при таком подходе не возникает необходимости аккуратно проследивать знак ЭДС самоиндукции, как при использовании закона Ома. Достаточно только понимать, что второе слагаемое в левой части уравнения (1.3.9) должно быть положительным, поскольку убыль энергии магнитного

поля сопровождается дополнительным выделением тепла, а полное количество тепла, выделяющегося в электрической цепи в результате прохождения тока, определяется законом Джоуля–Ленца.

Используя законы сохранения, всегда следует помнить, что соответствующие им уравнения описывают не динамику изучаемого процесса, а только баланс определенных величин при этом процессе. Может оказаться, что протекание процесса, для которого составлены уравнения баланса, запрещено какими-то причинами. В этом случае полученные решения уравнений не будут иметь физического смысла. В качестве простейшего примера такой ситуации можно привести задачу, когда в идеальном калориметре смешиваются одинаковые массы льда при температуре 0°C и воды при заданной температуре t° , и требуется определить температуру Θ смеси, когда лед растает.

Уравнение теплового баланса для этого процесса,

$$cm_{\text{в}}(t^\circ - \Theta) = \lambda m_{\text{л}} + cm_{\text{л}}\Theta,$$

не будет иметь физического смысла, если температура воды t° не будет достаточно велика, чтобы обеспечить таяние всего льда. В этом случае в приведенном уравнении при $m_{\text{в}} = m_{\text{л}}$ для температуры Θ получим отрицательное значение, не имеющее смысла. Поэтому, составляя уравнение теплового баланса для процесса, включающего фазовый переход, как в данном случае, нужно убедиться, что выделяющееся при остывании воды от t° до 0°C тепла хватит для того, чтобы растопить весь лед. Только в этом случае приведенное уравнение будет иметь смысл. В противном случае температура смеси будет равна 0°C , и можно определить, какая часть $\alpha < 1$ льда растает:

$$cm_{\text{в}}t^\circ = \alpha \cdot m_{\text{л}}\lambda.$$

Может случиться и в определенном смысле обратная ситуация, когда составленные на основе законов сохранения уравнения окажутся одинаковыми для различных физических процессов. В этом случае встает проблема отбора нужных корней уравнений. Рассмотрим задачу.

Задача 1.13. *Горизонтально летящая пуля массой m пробивает насквозь первоначально неподвижный шар массой M и вылетает из него со скоростью, вдвое меньшей ее первоначальной скорости. Какая часть кинетической энергии пули превращается при этом во внутреннюю энергию?*

Совершенно очевидно, что для замкнутой системы «пуля–шар» выполняются законы сохранения энергии и импульса. Обозначая через v

скорость пули до взаимодействия с шаром, а через V — скорость шара, пробитого пулей, записываем закон сохранения импульса в виде

$$mv = m\frac{v}{2} + MV, \quad (1.3.10)$$

Учитывая выделяющееся при пробивании шара тепло Q , записываем закон сохранения энергии следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{MV^2}{2} + Q, \quad (1.3.11)$$

Выражая V из (1.3.10) и подставляя в уравнение (1.3.11), для Q получаем

$$Q = \frac{1}{8}mv^2 \left(3 - \frac{m}{M}\right).$$

Составляя отношение Q к начальной кинетической энергии пули, $E_0 = mv^2/2$, находим

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{m}{M}\right), \quad (1.3.12)$$

Выделяющееся тепло не может быть отрицательным. Условие положительности Q приводит к неравенству $m/M \leq 3$.

Но при исследовании полученного результата этим ограничиться нельзя. Обратим внимание на то, что точно такими же уравнениями (1.3.10) и (1.3.11) выражались бы законы сохранения импульса и энергии и при таком процессе: пуля налетает на неподвижный шар, толкает его и движется позади шара со скоростью, вдвое меньшей ее первоначальной скорости. Поэтому полученный результат (1.3.12) содержит в себе ответы для обоих указанных случаев. Чтобы выделить их из (1.3.12), нужно учесть, что при пробивании шара насквозь $v/2 > V$, а в случае, когда пуля движется позади шара после столкновения с ним, $v/2 < V$. Поэтому, решая конкретную задачу, нужно дополнить уравнение (1.3.10) одним из этих условий. Например, для рассмотренной задачи условие $v/2 > V$ приводит к следующему неравенству для отношения масс пули и шара:

$$\frac{m}{M} < 1, \quad (1.3.13)$$

и ответ на вопрос задачи дается соотношением (1.3.12) с дополнительным условием (1.3.13).

Итак, при $m/M < 1$, когда пуля пробивает шар, величина Q/E_0 может варьироваться в пределах

$$\frac{1}{2} < \frac{Q}{E_0} < \frac{3}{4}.$$

Если $m/M = 1$, то после столкновения пуля и шар имеют одинаковые скорости, равные $v/2$, и скорее всего, пуля застревает в шаре. Это

случай абсолютно неупругого столкновения, и в этом случае $Q/E_0 = 1/2$.

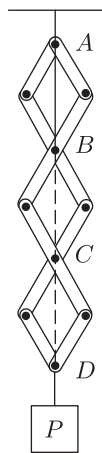
При $1 < m/M < 3$ шар летит впереди пули и $0 < Q/E_0 < 1/2$.

Наконец, при $m/M = 3$, $Q = 0$ — тепло вообще не выделяется. Это случай абсолютно упругого соударения. Подчеркнем еще раз, что перечисленные результаты относятся только к случаю, когда в результате столкновения скорость пули уменьшается вдвое.

Закон сохранения энергии может эффективно использоваться при решении задач статики, существенно упрощая необходимые выкладки.

Задача 1.14. Найдите натяжение легкой нити, соединяющей попарно и поочередно точки A , B , C и D легкого шарнирного устройства, показанного на рисунке, к которому подвешен груз P . Трение отсутствует.

При соединении нитью точек A и D ответ очевиден и может быть получен сразу: $T = P$. Для других пар точек решение задачи может быть очень простым, если рассматривать эту систему как простой механизм и использовать для расчетов метод виртуальной работы¹⁾. Для этого предположим, что груз P поднимается за счет уменьшения длины невесомой нерастяжимой нити, соединяющей любую пару из показанных на рисунке точек — A , B , C и D .



Используя закон сохранения энергии и учитывая геометрические соотношения между величиной сокращения нити и высотой происходящего при этом подъема груза, легко найти, что при соединении нитью любой соседней пары точек (A и B , B и C , C и D) натяжение нити равно $3P$, а при соединении точек A и C или B и D натяжение нити равно $3P/2$.

Действительно, при уменьшении длины нити, соединяющей, например, точки A и B , на величину Δx , вследствие жесткости стержней точка B поднимется вверх на Δx , точка C — на $2\Delta x$, а точка D — на $3\Delta x$. При этом сила T , действующая со стороны нити на точку B , совершила бы работу $T\Delta x$, что привело бы к изменению потенциальной энергии системы на величину $P3\Delta x$. Приравнявая работу ΔA , совершаемую при этом

¹⁾ Следует заметить, что поскольку задача статическая, то на самом деле никакого движения нет и никакой работы не совершается. Однако, такой процесс, при котором нить сокращается, принципиально возможен. Работу, которая реально не совершается, но совершение которой принципиально возможно при некотором воображаемом процессе, и называют виртуальной работой.

процессе, увеличению потенциальной энергии груза, получим:

$$\Delta A = T \cdot \Delta x = P \cdot 3\Delta x,$$

откуда следует ответ $T = 3P$.

Проводя аналогичные рассуждения для точек B и C , а также C и D , следует учесть, что при изменении длины соединяющей их нити по отношению к земле изменяется положение обеих точек. При уменьшении длины нити, соединяющей, например, точки C и D , на величину Δx , вследствие жесткости стержней точка C поднимется вверх на $2\Delta x$, а точка D — на $3\Delta x$. Важно четко понимать, что при этом сила T , действующая на точку C шарнира со стороны нити совершает отрицательную работу $-T \cdot 2\Delta x$, а сила T , действующая на точку D — положительную работу, равную $T \cdot 3\Delta x$. Сумма работ внешних по отношению к шарниру сил определяет изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta A = T \cdot 3\Delta x - T \cdot 2\Delta x = P \cdot 3\Delta x,$$

откуда также получается приведенный выше результат.

При изменении длины нити, соединяющей точки A и C , на Δx вследствие жесткости стержней положение точки D изменяется на $\Delta x/2$ по отношению к точке C и на $3\Delta x/2$ по отношению к земле, откуда следует:

$$T \cdot \Delta x = P \cdot \frac{3}{2}\Delta x,$$

$$T = \frac{3}{2}P.$$

Рассуждения для оставшихся пар точек предоставляем провести читателю.

Особенно эффективным при решении физических задач оказывается использование законов сохранения совместно с методологическими принципами физики, такими как относительность, симметрия, толерантность. Одинаковый вид физических законов во всех инерциальных системах отсчета позволяет составлять уравнения, соответствующие законам сохранения, по единой схеме. При этом возможно значительное сокращение производимых выкладок, поскольку, например, работа, совершаемая действующей на тело силой F в одной системе отсчета, равна нулю в другой системе, где тело неподвижно. Подробнее этот вопрос и иллюстрирующие его примеры будут рассмотрены в следующем параграфе, а подобная схема решения задач будет широко использоваться на протяжении всей книги.

1.4. Использование методологических принципов

Рассмотрим примеры, когда использование методологических принципов физики позволяет сразу упростить решение задачи и избежать громоздких математических преобразований.

Принцип относительности

Задача 1.15. Две дороги пересекаются под прямым углом. Автомобиль, движущийся по одной из дорог со скоростью v_1 , находится на расстоянии d от перекрестка в тот момент времени, когда другой автомобиль, движущийся со скоростью v_2 по второй дороге, пересекает перекресток. Каким будет наименьшее расстояние $d_{\min}$ между автомобилями?

Эта нетрудная в принципиальном плане задача требует, тем не менее, довольно громоздких преобразований при попытке решить ее «в лоб» в исходной системе отсчета, связанной с Землей. Однако можно перейти в систему отсчета, связанную с одним из автомобилей, например, со вторым (см. рис. 1.15). Эта система движется равномерно относительно исходной системы отсчета со скоростью v_2 . В новой системе отсчета второй автомобиль неподвижен, а скорость первого $\mathbf{v}'_1$ (в соответствии с законом сложения скоростей $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_1$) равна векторной сумме $\mathbf{v}_1$ и $-\mathbf{v}_2$.

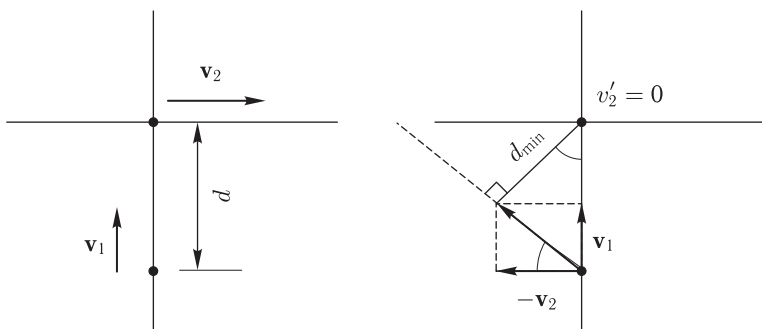


Рис. 1.15.

В новой системе отсчета наименьшее расстояние $d_{\min}$ между автомобилями, в соответствии с теоремой о перпендикуляре, опущенном из точки на прямую, определяется из рассмотрения подобных треугольников: отмеченные дугами углы на рисунке равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, поэтому

$$\frac{d_{\min}}{d} = \frac{v_2}{v_1},$$

или

$$\frac{d_{\min}}{d} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

откуда

$$d_{\min} = d \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Полученный ответ удовлетворяет очевидным предельным случаям: при $v_2 = 0$ (второй автомобиль стоит неподвижно на перекрестке) $d_{\min} = 0$; при $v_1 = 0$ (первый автомобиль стоит на расстоянии d от перекрестка) $d_{\min} = d$.

В данной задаче новая система отсчета, связанная с автомобилем, является инерциальной, однако в кинематических задачах это не имеет принципиального значения. Иначе обстоит дело в динамических задачах, когда инерциальность новой системы отсчета играет принципиальную роль, обеспечивая одинаковость физических законов в рассматриваемых системах. Рассмотрим задачу.

Задача 1.16. *Как отличается процесс вытекания воды из отверстия в дне ведра в равномерно движущемся поезде от процесса вытекания воды из этого же отверстия в неподвижном поезде для наблюдателя, находящегося в этом поезде?*

Ответ получается сразу с помощью использования принципа относительности: никак не отличается, поскольку опытами, произведенными внутри инерциальной системы, невозможно обнаружить равномерное прямолинейное движение этой системы. Если бы процесс вытекания отличался бы какими-нибудь характеристиками (например, временем вытекания воды, формой струи и т.д.), то это позволило бы обнаружить факт равномерного движения поезда, не выглядывая в окно.

Задача 1.17. *Возможно ли излучение света свободным электроном?*

На первый взгляд может показаться, что движущийся электрон может уменьшить свою скорость, передав испускаемому фотону часть своего импульса и кинетической энергии. Однако оказывается, что удовлетворить законам сохранения энергии и импульса при этом невозможно. Проще всего в этом убедиться, перейдя в систему отсчета, где электрон неподвижен. Такая система существует, поскольку свободный электрон может двигаться только со скоростью, меньшей скорости света, и эта система отсчета будет инерциальной вследствие постоянства скорости электрона в исходной лабораторной системе отсчета. Энергия электрона в системе, где он неподвижен, определяется его массой покоя m_0 и равна $E = m_0 c^2$. После излучения фотона вследствие закона сохранения импульса электрон приобретает некоторую скорость v .

Энергия образовавшейся системы «электрон + фотон», равная первоначальной энергии электрона, теперь будет складываться из энергии движущегося со скоростью v электрона и энергии $h\nu$ фотона. В результате должно выполняться равенство

$$m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\nu, \quad (1.4.1)$$

которое невозможно, поскольку уже первое слагаемое в правой части больше, чем левая часть.

Нетрудно убедиться, что свободный электрон не может не только излучать свет, но и поглощать его. Для этого достаточно просто прочитать равенство (1.4.1) в обратном порядке: правая часть дает энергию системы «электрон + фотон» до поглощения фотона в системе отсчета, где полный импульс электрона и фотона равен нулю, и левая часть — энергию остановившегося вследствие закона сохранения импульса электрона. Такая система отсчета обязательно существует, поскольку электрон, если бы даже он поглотил фотон, все равно в лабораторной инерциальной системе двигался бы со скоростью, меньшей скорости света.

Отметим, что попытки получить результат в лабораторной системе отсчета привели бы к громоздким алгебраическим выкладкам. Например, рассмотрев в лабораторной системе отсчета заведомо простейший частный случай, когда движущийся со скоростью v электрон останавливается, передавая свой импульс испускаемому фотону, мы пришли бы к следующей системе уравнений:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0c^2 + h\nu, \quad \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{h\nu}{c}.$$

Решая эту систему, после довольно громоздких преобразований мы получили бы $v = 0$ и $\nu = 0$, что невозможно. Более общий случай, когда электрон не останавливается, привел бы к еще более громоздким выкладкам.

Итак, решение этой задачи приводит к важному выводу, что излучать или поглощать фотоны электрон может только тогда, когда он движется с ускорением.

Задача 1.18. *Может ли не взаимодействующий с другими объектами фотон родить электрон-позитронную пару? Какова наименьшая энергия фотона, способного родить пару?*

Превращение фотона в электрон-позитронную пару возможно лишь в присутствии еще какой-либо частицы. Без такой частицы этот процесс запрещен законом сохранения импульса. Действительно, предположим, что этот процесс произошел, и родилась электрон-позитронная

пара. Всегда найдется такая система отсчета, в которой центр масс системы «электрон-позитрон» неподвижен, т. е. полный импульс образовавшейся пары равен нулю. Тогда в этой системе отсчета должен быть равен нулю и импульс фотона, образовавшего пару. Но это невозможно, так как не существует системы отсчета, где фотон покоится.

Итак, фотон может превратиться в электрон-позитронную пару только в присутствии еще какой-либо частицы. Нетрудно убедиться, что необходимая для рождения пары энергия фотона будет тем меньше, чем больше масса m частицы, «принимającej на себя» импульс фотона. Действительно, чем больше масса этой частицы, тем меньшую кинетическую энергию $p^2/2m$ она приобретет, поглощая импульс фотона p . Поэтому наименьшая энергия фотона, при которой возможно рождение пары, равна $h\nu = 2m_0c^2$, и происходить этот процесс может в присутствии тяжелой частицы, когда $m_0/m \ll 1$.

Задача 1.19. Какой минимальной энергией должен обладать фотон, чтобы могло произойти рождение электрон-позитронной пары вблизи покоящегося электрона?

Перейдем из лабораторной системы в систему отсчета, в которой покоится центр масс трех частиц — исходного электрона и родившейся электрон-позитронной пары. В этой системе отсчета полная энергия будет минимальной, если все три частицы покоятся. Тогда в исходной лабораторной системе после рождения пары все три частицы должны двигаться с одинаковой скоростью. Поскольку массы частиц одинаковы, то одинаковыми будут и их импульсы. По закону сохранения импульса это означает, что полный импульс системы, который до рождения пары складывался из импульса фотона и электрона, после рождения пары распределится поровну между тремя частицами. Если до рождения пары электрон в лабораторной системе отсчета покоился, то после рождения пары импульс p каждой частицы равен одной трети импульса фотона:

$$p = \frac{1}{3} \frac{h\nu}{c}.$$

Энергия всех трех частиц также одинакова и равна

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \sqrt{\left(\frac{h\nu}{3}\right)^2 + m_0^2c^4}.$$

До рождения пары энергия системы в лабораторной системе отсчета — это энергия фотона $h\nu$ и энергия покоя покоящегося электрона m_0c^2 . По закону сохранения энергии имеем равенство

$$h\nu + m_0c^2 = 3\sqrt{\left(\frac{h\nu}{3}\right)^2 + m_0^2c^4}.$$

Возводя обе части равенства в квадрат, приходим к ответу:

$$h\nu = 4m_0c^2.$$

Обратим внимание на то, что в рассуждениях мы пренебрегали потенциальной энергией кулоновского взаимодействия электронов и позитрона.

В некоторых случаях использование принципа относительности и переход в другую инерциальную систему отсчета применяется, как и в разобранной задаче, только для доказательства или выяснения некоторых моментов, а расчет проводится потом в исходной системе отсчета. Приведем еще один подобный пример.

Задача 1.20. *Наименьшая энергия возбуждения атома гелия равна $\Delta E = 21,12$ эВ. Возможно ли возбуждение неподвижного атома гелия при столкновении с протоном, обладающим энергией 24 эВ? С электроном той же энергии?*

На первый взгляд может показаться, что для возбуждения атома наиболее благоприятен случай, когда в результате столкновения налетающая на неподвижный атом частица останавливается, передавая атому всю свою кинетическую энергию. Однако, как ясно из закона сохранения импульса системы, в этом случае вся переданная энергия не может пойти на возбуждение атома, и оказывается, что в случае, когда налетающая частица останавливается, кинетическая энергия атома (т.е. всей системы) не будет наименьшей. Во внутреннюю энергию атома переходит наибольшая часть кинетической энергии налетающей частицы, если после столкновения атом и налетающая частица движутся с одинаковой скоростью.

Для того, чтобы убедиться в этом, удобно перейти в другую инерциальную систему отсчета, в которой полный импульс системы равен нулю. В этой системе отсчета после столкновения оба тела — и атом, и частица могут остановиться. Если они действительно остановятся, то во внутреннюю энергию атома перейдет вся первоначальная кинетическая энергия, а в исходной лабораторной системе отсчета атом и столкнувшаяся с ним частица будут иметь одинаковую скорость.

Выяснив эти моменты, можно все расчеты выполнить в лабораторной системе отсчета. При заданном в условии значении энергии возбуждения ΔE и электрон, и тем более протон будут двигаться со скоростью, много меньшей скорости света, поэтому для энергии и импульса можно использовать нерелятивистские выражения.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении в лабораторной системе отсчета имеют следующий вид:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)V^2}{2} + \Delta E, \quad mv = (M+m)V,$$

где m и v — масса и скорость налетающей частицы, M — масса атома, а V — одинаковая у атома и налетающей частицы скорость после столкновения. Выражая V из второго уравнения и подставляя в первое, получаем

$$E_{\text{к}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta E.$$

Из этого соотношения следует, что чем легче налетающая частица, тем меньше может быть ее кинетическая энергия, достаточная для возбуждения атома. При возбуждении атома налетающим электроном $\frac{m}{M} \ll 1$ и практически достаточно, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии возбуждения ΔE . Если атом гелия возбуждается налетающим протоном, то $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{4}$, и кинетическая энергия протона должна быть в 1,25 раз больше энергии возбуждения. Поэтому электрон с энергией 24 эВ может возбудить атом гелия (но может и упруго рассеяться, законы сохранения энергии и импульса не запрещают такого процесса), в то время как протон с такой энергией обязательно будет упруго рассеиваться.

Иногда переход в другую инерциальную систему отсчета позволяет вообще избежать каких-либо расчетов, даже в случаях, когда требуется определить количественные характеристики явления, и непосредственно записать ответ.

Задача 1.21. Водометный катер движется по озеру с постоянной скоростью v , выбрасывая n литров воды в секунду со скоростью u относительно катера. Определите мощность мотора катера.

Катер движется с постоянной скоростью за счет того, что реактивная сила, возникающая при выбрасывании воды, уравнивает действующую на катер силу сопротивления. Величина реактивной силы определяется импульсом, уносимым выбрасываемой водой в единицу времени. В лабораторной системе отсчета, связанной с неподвижной водой в озере и ее берегами, скорость выбрасываемой водометным двигателем воды равна $u - v$, поэтому реактивная сила равна

$$F = n\rho(u - v).$$

Умножая F на скорость движения катера v , получаем мощность N_1 , развиваемую при совершении работы реактивной силой:

$$N_1 = Fv = n\rho(u - v)v.$$

Кроме того, мощность N_2 , обеспечивающая кинетическую энергию воды, выбрасываемой двигателем в единицу времени равна

$$N_2 = \frac{n\rho}{2} (u - v)^2.$$

Полная мощность N , развиваемая мотором катера, равна сумме $N_1 + N_2$. После элементарных преобразований находим

$$N = \frac{n\rho}{2} (u^2 - v^2). \quad (1.4.2)$$

Отметим, что $u > v$, поскольку для существования реактивной силы необходимо, чтобы в лабораторной системе отсчета скорость выбрасываемой воды была направлена противоположно скорости катера.

Система отсчета, связанная с катером, также будет инерциальной. Поскольку катер в этой системе неподвижен, то реактивная сила работы не совершает. Озерная вода в этой системе отсчета движется со скоростью v . Поэтому в единицу времени мотор катера забирает из озера воду, обладающую кинетической энергией $n\rho v^2/2$, и выбрасывает ее с кинетической энергией $n\rho u^2/2$. Мощность мотора определяется разностью этих выражений, и мы немедленно получаем соотношение (1.4.2).

Принцип симметрии

Школьный курс физики предоставляет широкие возможности для последовательного использования соображений симметрии при решении задач. При этом важно четко демонстрировать инвариантность определенных характеристик физической системы относительно преобразований, допускаемых соображениями симметрии, а не отделяться общими словами, делая утверждения «из соображений симметрии».

Задача 1.22. *Стальной шарик свободно падает без начальной скорости с высоты H на мраморную плиту. На какой высоте h и как следует ее расположить, чтобы упруго отразившись, шарик улетел на максимальное расстояние по горизонтали?*

Очевидное в принципиальном плане решение этой задачи подразумевает исследование на экстремум функции двух независимых параметров — мраморную плиту можно расположить на произвольной высоте $h < H$ и ориентировать ее под произвольным углом α в интервале $(0; \pi/2)$ (см. рис. 1.22).

Необходимые математические преобразования при таком решении настолько громоздки, что часто оказываются не по силам даже студентам вузов. Между тем, возможно изящное решение этой задачи, основанное на использовании свойства обратимости недиссипативного механического движения, которое вообще не требует никаких математических выкладок, если ранее уже была решена задача о максимальной

дальности полета по горизонтали тела, брошенного под углом к горизонту.

Уравнения динамики консервативных систем не изменяются при обращении времени, то есть при замене $t \rightarrow -t$. Это означает, что движение в потенциальном силовом поле обратимо при обращении скорости движения в какой-либо точке траектории, то есть замене $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, тело будет двигаться «вспять» по той же самой траектории, проходя все участки за те же самые промежутки времени, что и при движении в «прямом» направлении. При этом в любых точках траектории при движении и в прямом, и в обратном направлениях модули скорости будут одинаковыми.

Переходя к обсуждаемой задаче, рассмотрим сначала более простую ситуацию: под каким углом к горизонту нужно бросить тело с начальной скоростью v , чтобы дальность полета по горизонтали была максимальной. Ответ прост — бросать нужно под углом $\pi/4$ к горизонту, и тело улетит на расстояние v^2/g .

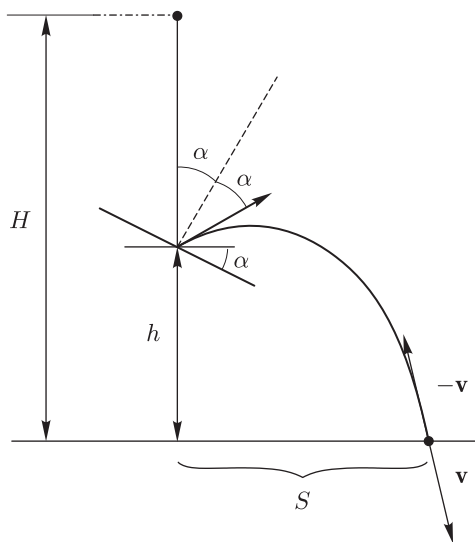


Рис. 1.22.

Теперь нетрудно сообразить, как можно решить исходную задачу. При упругом ударе о плиту тело упадет на землю со скоростью $v = \sqrt{2gH}$ независимо от того, как ориентирована плита и на какой высоте она расположена. Обратим в точке падения тела на землю скорость $\mathbf{v}$, заменив ее на $-\mathbf{v}$. Тогда тело проделает в обратном направлении тот же самый путь и после отражения от плиты поднимется в исходную точку. В частности, если скорость тела $-\mathbf{v}$ в точке падения

тела на землю направлена под углом $\pi/4$ к горизонту, а плита поставлена на высоте $h = 0$ под углом $\pi/8$ к горизонту, то после отражения от нее тело поднимется в исходную точку на высоту H . При этом дальность полета тела по горизонтали от точки обращения скорости до расположенной у поверхности земли плиты будет максимальной при данной начальной скорости $v = \sqrt{2gH}$.

Итак, плиту следует расположить на высоте $h = 0$ и ориентировать ее под углом $\pi/8$ к горизонту (см. рис. 1.22), чтобы после отражения от нее скорость тела была направлена под углом $\pi/4$ к горизонту. Тогда после отражения от плиты тело улетит на максимальное расстояние по горизонтали, равное $S = v^2/g = 2H$.

Задача 1.23. Имеется n клемм, каждая из которых соединена со всеми остальными клеммами одинаковыми проводниками с сопротивлением R . Зависит ли сопротивление между двумя клеммами от выбора этих клемм? Определите сопротивление между двумя выбранными клеммами.

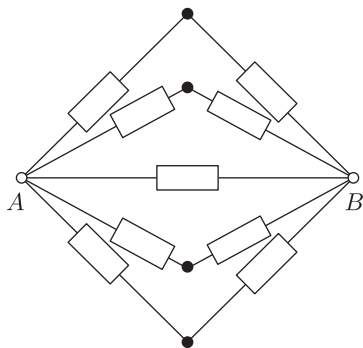


Рис. 1.23.

В задаче налицо определенная симметрия, поскольку каждая клемма находится в одинаковых условиях по отношению к остальным $(n - 1)$ клеммам. Поэтому сопротивление между двумя клеммами не может зависеть от выбора этих клемм. Рассмотрим вспомогательную схему, показанную на рис. 1.23.

Две выбранные клеммы A и B соединены друг с другом проводником сопротивлением R , и остальные $(n - 2)$ клеммы соединены с клеммами A и B такими же проводниками

сопротивлением R , но не соединены друг с другом. В результате между клеммами A и B параллельно включены сопротивление R и $(n - 2)$ сопротивлений $2R$, и сопротивление R_{AB} между этими клеммами определяется соотношением

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{n - 2}{2R},$$

откуда

$$R_{AB} = \frac{2R}{n}.$$

Для того, чтобы превратить эту вспомогательную схему в описанную в условии задачи, нужно соединить каждую из остальных $(n - 2)$ клемм, показанных черными точками на рисунке, с остальными $(n - 3)$ клеммами проводниками с сопротивлением R . Однако нетрудно видеть,

что такие соединения не изменят сопротивления R_{AB} во вспомогательной схеме. Очевидно, что потенциалы остальных $(n - 2)$ клемм окажутся равными между собой. Поэтому их можно соединить между собой любыми сопротивлениями, и это не приведет к появлению в них тока. Значит, при таком соединении не изменится и сопротивление R_{AB} между выделенными клеммами A и B .

Итак, для простого решения этой задачи нужно уловить не очевидную на первый взгляд симметрию исходной схемы, заключающуюся в эквивалентности всех остальных клемм, кроме выбранных A и B , и независимости результата от того, какие две клеммы выбираются из полного их числа n .

Весьма эффективным является использование соображений симметрии совместно с принципом суперпозиции при решении задач о нахождении напряженности или потенциала электрического поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов.

Задача 1.24. *Определить напряженность и потенциал электрического поля в центре квадрата со стороной a , если в его вершинах расположены точечные заряды, показанные на рис. 1.24, а.*

Задачу можно решать непосредственно, используя только принцип суперпозиции. Для потенциала это сразу приводит к результату:

$$\varphi = \frac{10\sqrt{2}q}{a}. \quad (1.4.3)$$

А вычисление напряженности, определяемой векторной суммой напряженностей, создаваемых отдельными зарядами, потребует преобразований, которые можно сделать короче, если воспользоваться принципом симметрии.

Нетрудно видеть, что напряженность поля в центре квадрата, в углах которого расположены одинаковые заряды, равна нулю. Этот факт дает возможность убрать из исходной схемы заряды, расположенные

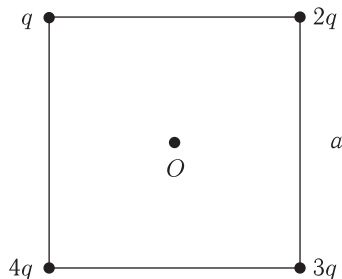


Рис. 1.24, а.

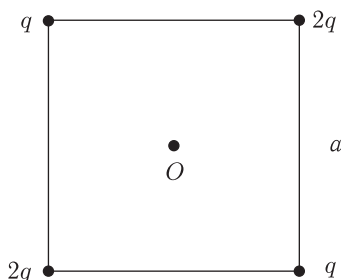


Рис. 1.24, б.

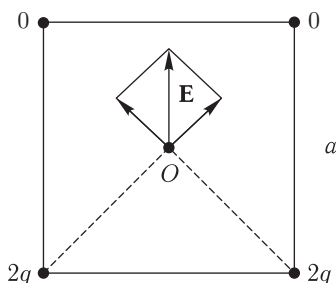


Рис. 1.24, в.

указанным образом, т. е. симметрично относительно диагоналей, и это не повлияет на напряженность поля в центре квадрата.

Убирая из исходной схемы (рис. 1.24, а) заряды, согласно рис. 1.24, б, получаем более простое распределение электрических зарядов (см. рис. 1.24, в), для которого напряженность поля в центре квадрата вычисляется элементарно. Она равна $E = 4\sqrt{2}q/a^2$ и направлена перпендикулярно стороне квадрата, на концах которой находятся электрические заряды.

Однако следует заметить, что для потенциала в центре квадрата теперь не получается прежнего значения (1.4.3), что и следовало ожидать, так как система зарядов теперь другая.

Задача 1.25. Между предметом и экраном помещена тонкая собирающая линза, перемещая которую, получают на экране два четких изображения предмета, одно из которых, в n раз больше другого. Найдите расстояние между двумя положениями линзы, соответствующими четким изображениям предмета на экране, если расстояние между предметом и экраном равно L .

Для первого четкого изображения предмета на экране справедливо равенство

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \quad (1.4.4)$$

причем по условию задачи

$$d_1 + f_1 = L. \quad (1.4.5)$$

Если мы запишем эти равенства для второго четкого изображения, то получим такую же систему уравнений с точностью до обозначений: $d_1 \rightarrow d_2$, $f_1 \rightarrow f_2$. Следовательно, возможные решения этой системы уравнений $d_2 = d_1$, $f_2 = f_1$ или $d_2 = f_1$, $f_2 = d_1$. Поскольку физически эти системы различаются (соответствуют различным положениям линзы), то следует выбрать второе решение:

$$d_1 = f_2, \quad f_1 = d_2. \quad (1.4.6)$$

Если обозначить размер предмета через h , а размер изображения при двух положениях линзы через h_1 и h_2 , то получаем очевидные равенства:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{d_1}{f_1}, \quad \frac{h}{h_2} = \frac{d_2}{f_2}. \quad (1.4.7)$$

Разделив эти равенства почленно, находим

$$n = \frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{f_2} \cdot \frac{f_1}{d_1},$$

что при учете (1.4.6) дает

$$n = \frac{f_1^2}{d_1^2},$$

откуда

$$f_1 = d_1 \sqrt{n}. \quad (1.4.8)$$

Искомое перемещение Δ линзы можно представить, например, как

$$\Delta = d_2 - d_1 = f_1 - d_1 = d_1 (\sqrt{n} - 1).$$

Величину d_1 можно найти с помощью уравнения (1.4.5) и соотношения (1.4.8):

$$d_1 = \frac{L}{\sqrt{n} + 1}.$$

Итак, выражение для перемещения линзы получаем в следующем виде:

$$\Delta = L \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}.$$

Обратим внимание на то, что избежать громоздких преобразований, связанных с использованием системы уравнений (1.4.4), (1.4.5), позволила подмеченная симметрия — одинаковость систем уравнений для двух случаев и симметрия уравнений относительно входящих в них неизвестных величин. Физическая причина обсуждаемой симметрии — обратимость хода лучей в рассматриваемой системе.

Однако решение данной задачи нельзя считать законченным, не указав условия реальной возможности экспериментального

наблюдения описанного в ней явления, т.е. при каких условиях поставленный в задаче вопрос имеет смысл.

В данном случае необходимо выяснить, всегда ли возможно получить на экране два изображения. Из системы уравнений следует также, что существует минимальное расстояние между предметом и экраном, при котором может быть получено действительное изображение:

- если $d \rightarrow \infty$, то $f \rightarrow F$, а $L = d + f$ соответственно увеличивается;
- если $d \rightarrow F$, то $f \rightarrow \infty$, а L также увеличивается.

Следовательно, при некоторых условиях L принимает наименьшее значение. Естественно, что следующим действием следует выяснить, каковы же эти условия. Это можно сделать разными способами с помощью различных математических средств, но самый простой способ также основан на использовании соображений симметрии математических уравнений, отражающих обратимость хода световых лучей.

Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ получаем выражение

$$d + f = \frac{df}{F}.$$

Оно симметрично относительно замены d на f , а f на d . Чтобы удовлетворить требованию минимальности суммы $L = d + f$, необходимо, чтобы d и f были одинаковыми: $d = f$. Следовательно,

$$2d = \frac{d^2}{F}, \quad d = 2F,$$

а минимальное расстояние между предметом и экраном, при котором еще можно получить действительное изображение, равно соответственно $L = 4F$.

Если же $L < 4F$, то изображение предмета будет формироваться за плоскостью экрана или будет мнимым, т.е. на экране его получить нельзя.

Вернемся к условию исходной задачи. Так как фокусное расстояние F не входит в явном виде в ответ задачи, оно и не задано в условии. Однако, для экспериментального наблюдения рассматриваемого явления необходимо, чтобы расстояние между предметом и экраном и фокусное расстояние тонкой линзы были связаны соотношением $L > 4F$.

Среди различных видов симметрии, характерных для физических систем, важным является физическое подобие, которое устанавливается с помощью простых масштабных преобразований.

Задача 1.26. В линейном ускорителе ионов, обладающих зарядом q и массой m , ускоряющее напряжение равно U , а путь, пройденный ионами в процессе разгона, равен L . Как изменится время

пролета иона на участке разгона в другом ускорителе, геометрически подобном первому, но рассчитанному на ускорение ионов с зарядом q' и массой m' , в котором используется напряжение U' , а длина участка разгона равна L' ?

Запишем соотношения, связывающие параметры обоих ускорителей:

$$m' = \alpha \cdot m, \quad q' = \beta q, \quad U' = \varepsilon U, \quad L' = \gamma L, \quad t' = \eta t,$$

где t и t' — времена пролета ионов в первом и втором ускорителях, а α , β , γ , η , ε — численные коэффициенты. Энергия иона в определенной точке ускорителя может быть записана в виде

$$E = \frac{mv^2}{2} + q\varphi,$$

где φ — потенциал ускоряющего поля в этой точке.

В соответствующей точке второго ускорителя энергия E' имеет следующий вид:

$$E' = \frac{m'v'^2}{2} + q'\varphi' = \frac{\alpha\gamma^2}{\eta^2} \cdot \frac{mv^2}{2} + \beta\varepsilon\varphi.$$

Если выбрать коэффициенты так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\eta^2} \equiv \beta\varepsilon \equiv c, \quad (1.4.9)$$

где c — получающийся численный коэффициент, то

$$E' = cE, \quad (1.4.10)$$

Обратим внимание на то, что все коэффициенты, кроме η , заданы в условии задачи. Поэтому фактически условие (1.4.9) — это уравнение для определения коэффициента η .

Уравнение (1.4.10) можно трактовать двояким образом. Можно считать, что мы действительно сравниваем энергии иона в соответствующих точках двух разных ускорителей. Но можно считать, что мы просто перешли к другой системе единиц измерения, рассматривая ион в том же самом ускорителе. Симметрия по отношению к этим двум возможным трактовкам соотношения (1.4.10) означает, что при реальном изменении параметров системы, то есть при переходе к новому ускорителю, время пролета иона изменится в η раз. С помощью соотношения (1.4.9) получаем коэффициент η :

$$\eta = t'/t = \gamma\sqrt{\alpha/\beta\varepsilon}. \quad (1.4.11)$$

Можно проверить полученный результат, рассмотрев доступный школьникам частный случай, когда ионы ускоряются в однородном

электрическом поле с напряженностью $E = U/L$. Тогда с помощью второго закона Ньютона находим время t :

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L \cdot m}{qE}} = \sqrt{\frac{2L^2 m}{qU}}.$$

Аналогичное выражение получится и для t' с заменой всех величин на штрихованные. Составив отношение t'/t , придем к равенству (1.4.11).

Обратим внимание на следующий важный методический момент. Данная задача, решение которой проведено без сложных математических выкладок, только с помощью качественного метода — метода подобия, может послужить основой для более сложного учебного исследования, требующего применения и качественных методов, и более сложного математического аппарата, и использования компьютерных средств. Приведем возможное направление такого исследования.

Расчет времени, необходимого для пролета частицы в ускорителе в общем случае может быть произведен только численно. Аналитический расчет возможен лишь в некоторых частных случаях, один из которых мы рассмотрим позднее. При численном расчете удобно вводить безразмерные переменные, то есть измерять физические величины в единицах характерных масштабов рассматриваемой задачи. В данной задаче условие определяет характерный масштаб массы, m — масса разгоняемой частицы, и характерный масштаб длины, L — длина разгона частицы. Таким образом, можно ввести безразмерные координаты (радиус-вектор),

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/L, \quad (1.4.12)$$

а массу m в уравнениях, определяющих движение, положить равной единице. В качестве третьего характерного масштаба в данной задаче удобно выбрать масштаб энергии, для которого можно взять величину qU — увеличение энергии частицы при разгоне. Таким образом, можно определить безразмерную энергетическую величину

$$\tilde{E} = \frac{E}{qU}. \quad (1.4.13)$$

Из величин m , L и qU можно, пользуясь соображениями размерности, составить характерный временной масштаб,

$$T = L \sqrt{\frac{m}{qU}}, \quad (1.4.14)$$

и ввести безразмерную переменную времени:

$$\tilde{t} = t/T. \quad (1.4.15)$$

Все остальные физические величины можно также привести к безразмерным, будем их помечать символом $\sim$. Время разгона может быть вычислено, исходя из уравнений движения, или из закона сохранения энергии. В первом случае решаем уравнение движения:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.4.16)$$

где в правой части стоит безразмерная сила, действующая на частицу в электрическом поле. Чтобы получить однозначное решение нужно добавить начальные условия:

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{v}}(0) = 0. \quad (1.4.17)$$

Во втором случае за основу может быть взято уравнение, следующее из закона сохранения энергии:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{v}^2}{2} + \tilde{q}\tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{r}}), \quad (1.4.18)$$

где в правой части стоит произведение безразмерного заряда на безразмерный потенциал электрического поля. Мы далее рассмотрим расчет времени разгона, исходя из этих уравнений для частного случая однородного электрического поля.

Выполняя численный расчет, можно получить некоторую безразмерную величину для времени разгона τ . Используя выражение для перехода от размерной к безразмерной временной переменной (формулы (1.4.14) и (1.4.15)), можно получить время разгона в обычных единицах времени:

$$t_0 = \tau T = \tau L \sqrt{\frac{m}{qU}}. \quad (1.4.19)$$

Аналогичное рассмотрение можно провести и для другого ускорителя. При введении безразмерных величин нужно просто заменить величины m , L , q , U на соответствующие величины со штрихами. Вид уравнений (1.4.11) и (1.4.18), а также начальных условий (1.4.17) при этом не изменится. Соответственно не изменится и безразмерное значение времени разгона τ . Переходя к обычным временным единицам, получим для времени разгона во втором случае значение

$$t'_0 = \tau T' = \tau L' \sqrt{\frac{m'}{q'U'}}.$$

Таким образом, для отношения времен разгона получим

$$\frac{t'_0}{t_0} = \frac{L'}{L} \sqrt{\frac{m'qU}{mq'U'}}. \quad (1.4.20)$$

Рассмотрим теперь частный случай однородного поля и рассчитаем время разгона. Действующая на частицу сила в этом случае

в безразмерных единицах по модулю равна единице. Проектируя уравнение движения (1.4.16) на ось, направленную по линии напряженности поля, получим для безразмерного ускорения

$$\tilde{a} = 1.$$

Соответственно для координаты, как функции времени получим:

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}^2}{2}.$$

Полагая $\tilde{x}(\tau) = 1$, найдем безразмерное время разгона:

$$\tau = \sqrt{2}. \quad (1.4.21)$$

Несколько сложнее вычисляется значение времени разгона, исходя из закона сохранения энергии. Поскольку безразмерная сила со стороны электрического поля равна единице, потенциальная энергия частицы в поле дается выражением:

$$\tilde{q}\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = -\tilde{x} + \text{const.}$$

Без потери общности константу можно положить равной нулю, тогда, исходя из начальных условий, получим, что энергия частицы равна нулю, откуда получим уравнение

$$0 = \frac{\dot{\tilde{x}}^2}{2} - \tilde{x}.$$

Из этого уравнения можно получить, что

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \sqrt{2\tilde{x}},$$

откуда получается равенство

$$\frac{d\tilde{x}}{\sqrt{2\tilde{x}}} = d\tilde{t}.$$

Проинтегрировав это равенство (левую часть от 0 до 1, а правую от 0 до τ), снова получим равенство (1.4.21).

Принципы простоты и толерантности

Принцип простоты всегда интуитивно используется при решении задач. Однако для развития умения решать задачи важно научиться целенаправленно и осознанно руководствоваться этим принципом для поиска наиболее эффективных путей решения задачи. Рассмотрим пример.

Задача 1.27. *Легкая лестница-стремянка состоит из двух одинаковых частей, шарнирно соединенных сверху и связанных веревкой у основания. Найдите натяжение веревки и силы, действующие*

в шарнире и на горизонтальный пол, на котором стоит стремянка, если на середине одной из половин стремянки стоит человек весом P . Трение отсутствует.

Проще всего найти силы давления на пол. На всю систему в целом действуют три внешние силы, направленные вертикально: вес человека P и силы реакции опоры N_1 и N_2 . Условие равновесия системы заключается в уравнивании этих сил и их моментов относительно любой точки, в частности, относительно одной из точек опор стремянки. Имеем (см. рис. 1.27, а):

$$N_1 + N_2 = P, \quad 2N_1 = \frac{P}{2}.$$

Решая эту систему, получаем

$$N_1 = \frac{P}{4}, \quad N_2 = \frac{3P}{4}.$$

Для определения силы в шарнире и натяжения веревки придется рассмотреть одну из половинок стремянки. Рассмотрим левую половину стремянки. В этом случае будут фигурировать три силы (см. рис. 1.27, б)

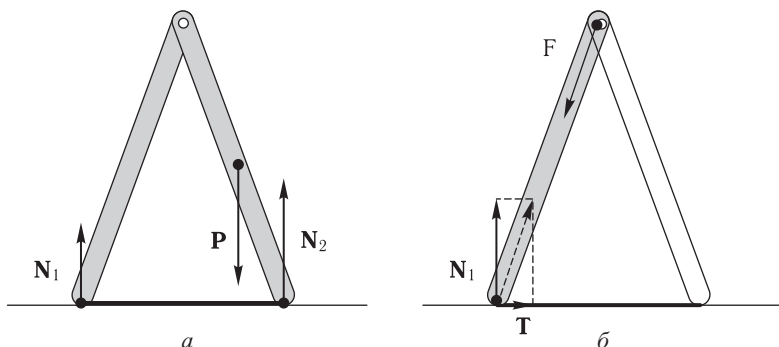


Рис. 1.27.

Очевидно, что действующая в шарнире сила F направлена вдоль половины стремянки, иначе не будут уравновешены моменты сил относительно точки опоры этой половины. Но тогда модуль этой силы равен модулю равнодействующей сил N_1 и T , направленной вдоль половины стремянки вверх. Если задан угол α , образуемый стремянкой с полом, то немедленно получаем:

$$T = N_1 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha, \quad F = \frac{N_1}{\sin \alpha} = \frac{P}{4 \sin \alpha}.$$

В противном случае нужно задавать линейные размеры стремянки, чтобы найти угол α .

Итак, для получения ответа нужно, по существу, воспользоваться только тем фактом, что линии действия трех сил, под действием которых тело находится в равновесии, должны пересекаться в одной точке.

Перечисленное выше деление методов решения физических задач на трех уровнях методологии является довольно условным, хотя в некоторых случаях, как видно из приведенных примеров, действительно удастся решить задачу, применяя только один из возможных приемов. В более сложных случаях приходится использовать различные комбинации возможных подходов. При этом использование разных подходов к решению задачи способствует осознанному усвоению принципа толерантности, суть которого заключается в возможности различных объяснений рассматриваемых явлений. При решении нетривиальных задач, вообще говоря, должны присутствовать в той или иной степени все три момента — общие методологические принципы физики, фундаментальные законы и частные законы, описывающие конкретные явления.

1.5. Условия задач и проверка полученных ответов

В завершение этой главы, где рассматривается общий подход к решению физических задач, остановимся подробнее на начале и окончании этого процесса, то есть на анализе условия задачи и на проверке полученных результатов. Как уже отмечалось, процесс решения задачи начинается с создания физической и математической моделей исследуемого процесса (иногда эти этапы изначально оказываются тесно переплетенными). Поэтому уже условие задачи должно формулироваться таким образом, чтобы ориентировать учащихся на такую деятельность в начале решения. При этом условие многих хорошо зарекомендовавших себя задач, приведенных в учебных пособиях [1, 5–7, 10] может быть немного видоизменено таким образом, чтобы сделать необходимым качественное исследование изучаемого процесса перед строгим решением. В этом смысле особенно поучительна традиционно широко представленная в учебной литературе задача об отрыве шайбы, скользящей без трения по поверхности цилиндра, от этой поверхности. Факт отрыва шайбы задается в условии задачи. Гораздо более предпочтительной является следующая формулировка условия.

Задача 1.28. *Шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины полуцилиндра. В пренебрежении трением исследуйте характер движения шайбы: будет ли она все время скользить по поверхности полуцилиндра или оторвется от нее в некоторой точке? Если оторвется, то где именно?*

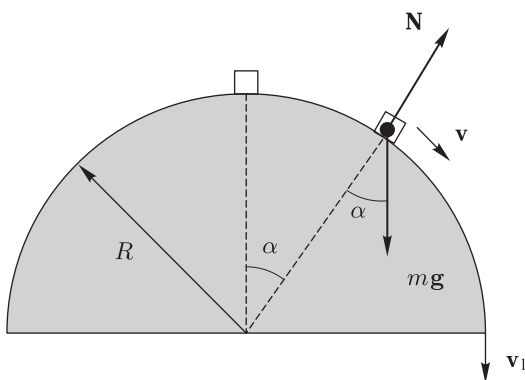


Рис. 1.28.

На рис. 1.28 показаны силы, действующие на шайбу при ее скольжении по поверхности полуцилиндра. Видно, что все это время существует горизонтальная составляющая силы реакции опоры N , направленная в одну и ту же сторону. Это означает, что существует горизонтальная составляющая ускорения и, следовательно, в процессе скольжения шайбы увеличивается горизонтальная составляющая скорости. Однако, если бы шайба двигалась, не отрываясь от поверхности, до точки, соответствующей значению угла $\alpha = \pi/2$, то ее скорость v_1 в этой точке была бы направлена по касательной к траектории движения. Поэтому шайба обязательно оторвется от поверхности, прежде чем угол α станет равным $\pi/2$.

Доказать обязательность отрыва шайбы можно и иначе, используя второй закон Ньютона:

$$mg + N = ma.$$

Проектируя это уравнение на ось, направленную радиально, получим

$$mg \cos \alpha - N = m \frac{v^2}{R}.$$

При движении шайбы по поверхности правая часть этого равенства увеличивается. Первое слагаемое в левой части уменьшается вплоть до значения, равного нулю при $\alpha = \pi/2$. Следовательно, N должна уменьшаться быстрее, чем $mg \cos \alpha$, чтобы обеспечить увеличение правой части, и должна обратиться в нуль раньше, чем $mg \cos \alpha$. Но $N = 0$ и есть условие отрыва шайбы от поверхности: на основании третьего закона Ньютона сила давления шайбы на поверхность равна по модулю и противоположно направлена силе реакции опоры N . Итак, условие отрыва шайбы от поверхности имеет вид

$$mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}. \quad (1.5.1)$$

Связать между собой значения скорости шайбы v и угла α при отсутствии трения можно с помощью закона сохранения энергии. Считая потенциальную энергию шайбы на вершине равной нулю, имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - mgR(1 - \cos \alpha) = 0. \quad (1.5.2)$$

Решая совместно систему уравнений (1.5.1) и (1.5.2), находим угол α , при котором происходит отрыв шайбы:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Можно также найти скорость шайбы $\mathbf{v}$ в момент отрыва и определить, на какое расстояние по горизонтали она улетит.

Приведем еще один пример возможного изменения условия задачи, ориентирующего на исследование физической модели явления. Фигурирующее во многих пособиях условие задачи имеет следующий вид.

Задача 1.29. В вертикально расположенном сосуде над и под поршнем находится одинаковое число молей идеального газа (рис. 1.29). Поршень может перемещаться по вертикали без трения. При начальной температуре системы отношение объемов $V_1^A/V_1^B = n$. Каким будет это отношение, если температуру изменить в k раз?

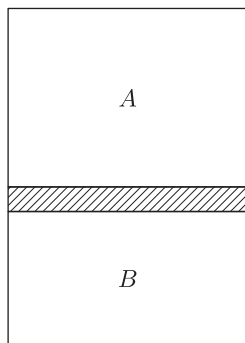


Рис. 1.29.

При такой полной заданности физической модели процесса решение задачи сводится к установлению соотношений между давлениями и объемами газа над и под поршнем при обеих заданных температурах. Идеализированный характер модели делает почти очевидным условие постоянства разности давлений газа под и над поршнем в состоянии равновесия.

$$p_1^B - p_1^A = p_2^B - p_2^A; \quad V_1^A + V_1^B = V_2^A + V_2^B. \quad (1.5.3)$$

Используя уравнения Менделеева-Клапейрона для каждой порции газа (над и под поршнем), соответствующие разным температурам, имеем:

$$p_1^A V_1^A = p_1^B V_1^B = \nu RT_1, \quad p_2^A V_2^A = p_2^B V_2^B = \nu RT_2,$$

откуда

$$\frac{p_1^B}{p_1^A} = \frac{V_1^A}{V_1^B} = n, \quad \frac{p_2^B}{p_2^A} = \frac{V_2^A}{V_2^B} = x.$$

Перемножая почленно уравнения (1.5.3), с учетом приведенных соотношений, приходим к квадратному уравнению для нового отношения объемов x :

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n^2 - 1}{n},$$

корень которого равен

$$x = \frac{n^2 - 1}{2nk} + \sqrt{\left(\frac{n^2 - 1}{2nk}\right)^2 + 1}.$$

Второй корень отрицательный и не имеет физического смысла вследствие того, что x равно отношению объемов. Полученный результат удовлетворяет очевидному предельному случаю: $x \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$.

Однако следует заметить, что приведенное выше условие задачи сразу исключает исследование условий экспериментального наблюдения рассматриваемого процесса, поскольку добиться обращения в нуль силы сухого трения между поршнем и стенками сосуда в условиях герметичности, когда газ не может переходить из одного объема в другой (например, из B в A), практически невозможно.

Предлагаемая ниже формулировка задачи стимулирует выяснение условий возможности экспериментального наблюдения процесса.

В вертикально расположенном сосуде под и над поршнем находится одинаковое количество молей газа при одинаковой температуре. Поршень, имеющий конечную массу, может перемещаться по вертикали, обеспечивая невозможность перетекания газа из одной части сосуда в другую. При этом его движение из положения равновесия начинается при сколь угодно малом изменении давления в газе. При начальной температуре системы отношение объемов равно $V_1^A/V_1^B = n$. Каким будет это отношение, если температуру изменить в k раз?

При создании физической модели теперь придется тщательно проанализировать данные условия задачи. Невозможность перетекания газа из одной части сосуда в другую подразумевает герметичность контакта поршня со стенками. Условие, что поршень начинает перемещаться при сколь угодно малой нескомпенсированной силе, означает, что по крайней мере, должна отсутствовать сила трения покоя между поршнем и стенками. Обеспечить выполнение этих двух условий может жидкая смазка мест контакта, поскольку при отсутствии движения поршня сила вязкого трения равна нулю и поршень начнет перемещаться под действием любой неуравновешенной силы. В новом положении равновесия скорость поршня опять равна нулю и сила трения снова отсутствует. Эти рассуждения приводят к выводу о равенстве разности давлений (обусловленной весом поршня) над и под поршнем в обоих

положениях равновесия. Дальнейшее решение совпадает с приведенным выше.

Проверяя правильность полученного при решении задачи результата, следует особенно внимательно относиться к выяснению возможного физического смысла отрицательных корней уравнений. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.30. Мимо наблюдателя, стоящего на вершине обрыва высотой h над рекой, пролетает вертикально вверх камень со скоростью v . В какой момент времени камень оказывается на поверхности воды в реке?

Считая, что момент пролета камня мимо наблюдателя соответствует $t = 0$, приходим к следующему уравнению, получающемуся проектированием векторного уравнения движения на вертикальную ось:

$$h + vt - \frac{gt^2}{2} = 0. \quad (1.5.4)$$

Корни этого квадратного уравнения даются выражением

$$t = \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}. \quad (1.5.5)$$

Корень со знаком плюс перед радикалом соответствует времени, в течение которого камень поднимается вверх от наблюдателя до остановки (первое слагаемое в правой части (1.5.5)) и затем падает вниз до уровня воды в реке (второе слагаемое в правой части (1.5.5), взятое со знаком плюс). Можно проверить, что радикал действительно дает время падения без начальной скорости с максимальной высоты подъема камня над рекой, равной

$$h_{\max} = h + \frac{v^2}{2g}, \quad h + \frac{v^2}{2g} = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2},$$

откуда

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

Однако физический смысл имеет и второй корень (1.5.5), хотя он и отрицателен. Этот корень соответствует времени подъема камня от уровня воды в реке до наблюдателя на высоте h при условии, что мимо наблюдателя он пролетает со скоростью v . Например, камень могли бросить от поверхности воды вверх со скоростью v_0 .

Эта скорость определяется соотношением

$$v_0^2 = v^2 + 2gh. \quad (1.5.6)$$

Обозначив через $t_{\text{под}}$ время подъема камня от поверхности воды на высоту h , приходим к уравнению

$$v_0 t_{\text{под}} - \frac{g t_{\text{под}}^2}{2} = h,$$

откуда

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}. \quad (1.5.7)$$

Очевидно, что корень со знаком минус равен времени подъема на высоту h , и со знаком плюс — времени подъема на максимальную высоту и затем падения с нее до уровня h над поверхностью воды. Используя значение v_0 , получаемое с помощью (1.5.7), убеждаемся, что время подъема до высоты h в (1.5.8) равно

$$t_{\text{под}} = \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} - \frac{v}{g}, \quad (1.5.8)$$

что с точностью до знака совпадает с отрицательным корнем в (1.5.5). Поскольку в задаче время отсчитывалось от момента пролета камня мимо наблюдателя, то время бросания камня вверх от уровня воды будет отрицательным.

При решении похожей задачи, когда камень пролетает вниз мимо наблюдателя на высоте h , время движения камня до поверхности воды также получается из решения квадратного уравнения, корни которого равны

$$t = -\frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

Нетрудно убедиться, что положительный корень дает время прямого полета камня до поверхности воды (сравните этот корень с (1.5.8)), а отрицательный — соответствует времени, в течение которого камень поднимается с начальной скоростью v_0 от поверхности воды, то есть движется и по восходящей, и по нисходящей ветвям траектории.

Можно опять провести независимый подсчет этого времени, и можно понять этот результат, учитывая свойство обратимости недиссипативного механического движения: если на поверхности воды установить «зеркало», упруго отражающее падающее тело, то тело будет проделывать свой путь туда и обратно множество раз, и только реально существующее сопротивление воздуха способно в конце концов прекратить эти полеты.

Проверку правильности решения задач можно проводить, устанавливая соответствие полученного результата частным или предельным случаям, когда ответ очевиден из общих соображений или может

быть установлен независимо более простым образом, чем при решении данной задачи. Многочисленные подобные проверки уже приводились выше. Далее будут продемонстрированы некоторые примеры, позволяющие выявить еще более тонкие аспекты такой проверки.

Задача 1.31. Внутри гладкой диэлектрической сферы радиусом R находится маленький шарик массой m с электрическим зарядом q , который может перемещаться по внутренней поверхности сферы в вертикальной плоскости, проходящей через шарик и центр сферы. Какой заряд Q нужно закрепить в нижней точке сферы, чтобы шарик мог находиться в равновесии на поверхности сферы в точке B , указанной на рисунке, так, что хорда BQ составляет угол α с радиусом BO . Заряд шарика q не вызывает поляризации сферы.

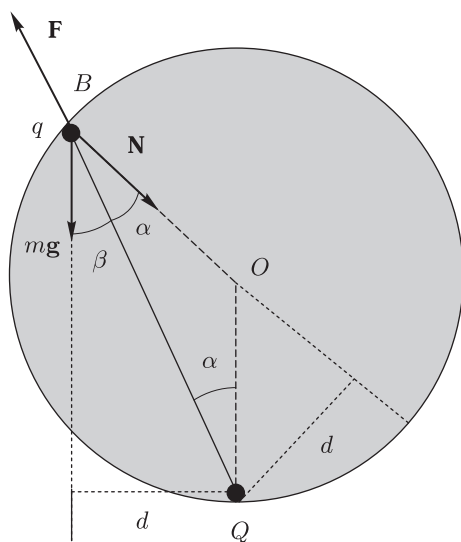


Рис. 1.31.

Шарик находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести mg , силы кулоновского взаимодействия зарядов q и Q , равной

$$F = k \frac{qQ}{4R^2 \cos^2 \alpha} \quad (1.5.9)$$

и направленной вдоль прямой, соединяющей заряды, и силы реакции опоры $\mathbf{N}$, направленной по радиусу к центру сферы, поскольку трение отсутствует. Поэтому

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0.$$

Видно, что в отсутствие силы N равновесие вообще невозможно: при $N = 0$ горизонтальная составляющая силы F остается неуравновешенной.

Так как треугольник OBQ , изображенный на рис. 1.31, является равнобедренным, то два угла в нем одинаковы и их значения равны заданной в условии величине α . Угол β равен α , как внутренние накрест лежащие углы при двух параллельных прямых, пересеченных третьей. Проектируя условие равновесия на касательную к окружности, проходящую через точку B ,

$$F \sin \alpha - mg \sin 2\alpha = 0,$$

сразу же получаем соотношение сил:

$$F = 2mg \sin \alpha.$$

С помощью равенства (1.5.9) получаем следующее выражение для заряда Q :

$$Q = \frac{8mgR^2 \cos^3 \alpha}{kq}. \quad (1.5.10)$$

Равновесие заряда q устойчивое, в чем легко убедиться, смещая его из положения равновесия, например, вниз по поверхности сферы. При этом кулоновская сила $\mathbf{F}$ возрастает по модулю, что ведет к увеличению силы реакции опоры $\mathbf{N}$. Плечи сил $\mathbf{N}$ и $m\mathbf{g}$ одинаковы при любом положении заряда q на сфере. Поэтому при увеличении $\mathbf{N}$ момент этой силы станет больше момента силы тяжести, и шарик вернется в положение равновесия.

Если заряд q помещен в верхней точке, то $\cos \alpha = 1$ и формула (1.5.10) дает:

$$Q = \frac{8R^2 mg}{kq}.$$

Такой результат может показаться странным, так как он не согласуется с более простым случаем: если рассмотреть условие равновесия заряда q на расстоянии $2R$ по вертикали от заряда Q , то приравнявая кулоновскую силу силе тяжести, получим другой результат:

$$Q = \frac{4R^2 mg}{kq}.$$

Причина расхождения результатов очевидна. Решая независимо упрощенную задачу, мы вообще игнорировали силу реакции опоры, фактически подразумевая, что сфера отсутствует. При этом равновесие шарика в верхней точке будет неустойчивым. При решении исходной задачи пренебречь силой N было нельзя: как мы видели, в ее отсутствие равновесие было невозможно, а при наличии этой силы оно сразу получалось устойчивым. Поэтому, если не учитывать силу реакции

опоры, то вторую задачу нельзя считать частным случаем первой и нельзя применять для проверки правильности ее решения.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну задачу, при решении которой ярко просматриваются все изложенные выше этапы решения задачи — от применения общих методологических принципов при анализе физической ситуации до проверки полученного результата.

Задача 1.32. Две звезды одинаковой массы m движутся таким образом, что в некоторый момент времени их скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ оказываются антипараллельными и образуют угол α с прямой, задающей расстояние l между звездами в этот момент. Определите массу звезды, если при дальнейшем движении они сближаются до минимального расстояния r (см. рис. 1.32).

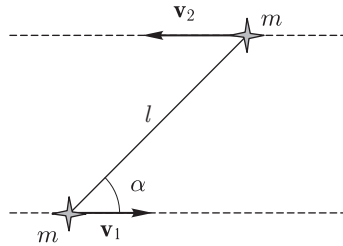


Рис. 1.32.

Эту задачу удобнее всего решать в системе отсчета, связанной с центром масс звезд, который в исходной системе движется со скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}.$$

В этой инерциальной системе отсчета скорости звезд $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ даются выражениями:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}.$$

Проектируя эти равенства на направление движения, например, первой звезды, получаем:

$$v'_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad v'_2 = -\frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Удобство новой системы отсчета заключается в том, что скорости звезд в ней равны по модулю, и при сближении на минимальное расстояние r скорости звезд u перпендикулярны соединяющему их отрезку. Закон сохранения энергии записываем в виде

$$2 \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right)^2 - G \frac{m^2}{l} = 2 \frac{mu^2}{2} - G \frac{m^2}{r}.$$

В это уравнение входят две неизвестные величины m и u . В качестве второго уравнения удобно взять уравнение, соответствующее закону сохранения момента импульса системы:

$$m(l \sin \alpha) \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} = r m u.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем для массы звезды m следующее выражение:

$$m = \frac{1}{G} \cdot \frac{r l}{l - r} \cdot \frac{(v_1 + v_2)^2}{4} \left(\frac{l^2 \sin^2 \alpha}{r^2} - 1 \right). \quad (1.5.11)$$

По условию задачи $l \sin \alpha > r$, поэтому полученное выражение положительно. Однако, кроме этого обстоятельства, мало что можно сказать по поводу правильности результата. Поэтому желательно найти частный случай рассматриваемой системы, который можно было бы проанализировать независимо с помощью других физических законов.

Например, частным и более простым случаем к приведенной задаче может служить ситуация, когда скорости звезд в лабораторной системе отсчета одинаковы, угол $\alpha = \pi/2$, а значения скоростей таковы, что они вращаются вокруг центра масс системы. Очевидно, что при таких условиях звезды уже находятся на минимальном расстоянии друг от друга, т.е. $l = r$. Описание такой ситуации может быть проведено на другом методологическом уровне — не с помощью законов сохранения энергии и момента импульса, а с помощью второго закона Ньютона:

$$G \frac{m^2}{r^2} = m \frac{2v_1^2}{r},$$

а, следовательно

$$m = \frac{2v_1^2 r}{G}. \quad (1.5.12)$$

Теперь остается только проверить, что в этом частном случае выражение (1.5.11) дает тот же результат. Ситуация осложняется тем, что в знаменателе правой части выражения (1.5.11) стоит разность $(l - r)$, которая в обсуждаемом частном случае равна нулю. Однако, преобразуя последний сомножитель в правой части (1.5.11), для данного случая можно переписать это выражение следующим образом:

$$m = \frac{r^2}{l - r} \cdot \frac{v_1^2 (l - r) (l + r)}{G r^2}.$$

Видно, что теперь множитель $(l - r)$ стоит и в числителе, и в знаменателе, и следовательно, может быть сокращен. В результате получаем формулу (1.5.12).

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом частном случае не пришлось переходить в другую систему отсчета — при равенстве

модулей антипараллельных скоростей звезд система отсчета, связанная с центром масс, совпадает с исходной лабораторной системой отсчета.

Показанная в этой задаче проверка правильности решения путем выбора другого способа рассмотрения изучаемого процесса является наиболее предпочтительной. В некоторых случаях такой подход позволяет выявить какие-то новые черты явления, остававшиеся незамеченными в процессе решения задачи. В то же время сопоставление независимых решений сложной более общей задачи и более простой задачи, соответствующей определенному частному случаю, лишней раз демонстрирует мощь фундаментальных законов сохранения, позволяющих находить ответы на вопросы, выяснение которых в рамках конкретных частных законов приводит к громоздким, а часто и более сложным, преобразованиям.

Глава 2

МЕХАНИКА

2.1. Кинематика материальной точки

Использование графиков зависимости скорости от времени и пройденного пути от времени помогают составить наиболее простые системы уравнений, описывающие рассматриваемые процессы. В качестве примера рассмотрим задачу из книги [15], для которой часто приводят нерациональное решение.

Задача 2.1. Двигаясь равноускоренно, поезд входит в тоннель с начальной скоростью v_0 . С какой скоростью v поезд полностью выйдет из тоннеля, если длина поезда равна длине тоннеля, а передняя стенка локомотива проходит тоннель за промежуток времени, вдвое больший, чем задняя стенка последнего вагона. С какой скоростью выйдет из тоннеля локомотив?

Наиболее рациональное и компактное решение этой задачи связано с составлением системы уравнений, в которую входит наименьшее число неизвестных величин. В этом помогает зависимость скорости от времени, изображенная на рис. 2.1.

Обозначим через τ промежуток времени, в течение которого проходит тоннель задняя стенка последнего вагона. Тогда, в соответствии с условием зада-

чи, передняя стенка локомотива проходит тоннель за промежуток времени, равный 2τ , и выходит из тоннеля со скоростью, обозначенной v_1 . Очевидно, что поезд полностью выходит из тоннеля через промежуток времени, равный 3τ , при этом он проходит путь, равный удвоенной длине тоннеля, и в момент выхода задней стенки последнего вагона из тоннеля скорость поезда равна v , а в момент входа в тоннель

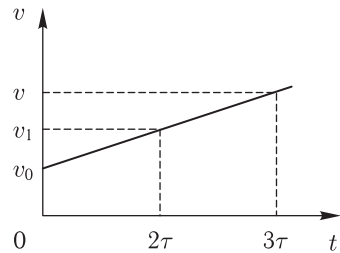


Рис. 2.1.

скорость задней стенки равна v_1 . С помощью графика, или учитывая, что движение равноускоренное, легко составляется система уравнений

$$\frac{v_0 + v_1}{2} 2\tau = \frac{v_1 + v}{2} \tau, \quad 2 \frac{v_0 + v_1}{2} 2\tau = \frac{v_0 + v}{2} 3\tau.$$

Первое из этих уравнений означает, что передняя стенка локомотива за промежуток времени 2τ и задняя стенка последнего вагона за промежуток времени τ проходят одинаковый путь, равный длине тоннеля. Второе уравнение означает, что поезд за промежуток времени, равный 3τ , проходит путь, равный удвоенной длине тоннеля. Уравнения выписываются или с учетом того, что пройденный путь определяется площадью под графиком $v(t)$, либо с помощью средней скорости, равной при равноускоренном движении полусумме начальной и конечной скорости. Сокращая τ , переписываем уравнения в виде

$$v - v_1 = 2v_0, \quad 3v - 4v_1 = v_0. \quad (2.1.1)$$

Решая эту систему, находим $v = 7v_0$, $v_1 = 5v_0$.

Обратим внимание на то, что, в отличие от решения, приведенного в [15], в данной системе уравнений не фигурирует в явном виде ускорение поезда, что сокращает число уравнений системы. Возможность записать систему уравнений, не используя формул, содержащих ускорение, подсказывает именно график зависимости скорости от времени. Если необходимо, ускорение можно найти, например, с помощью соотношения $v_1 = v_0 + a \cdot 2\tau$.

Эффективность использования графиков наглядна и при решении следующей задачи.

Задача 2.2. Легковой автомобиль трогается с места по зеленому сигналу светофора и, двигаясь с постоянным ускорением, достигает скорости $v_1 = 60$ км/ч, после чего начинает двигаться равномерно. В момент загорания зеленого сигнала светофора через перекресток проходит грузовик, двигаясь с постоянной скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Обгонит ли легковой автомобиль грузовик на участке разгона, или после достижения скорости v_1 ? Сколько для этого потребуется времени?

На рис. 2.2 показаны зависимости от времени скоростей легкового автомобиля и грузовика.

Время разгона легкового автомобиля τ зависит от ускорения, с которым он движется. Пройденные за это время автомобилем и грузовиком пути равны площадям под соответствующими графиками. Легко видеть, что площадь под графиком скорости грузовика, равная $v_2\tau$, при любом τ больше площади треугольника под наклонной частью графика скорости легкового автомобиля, равной $v_1\tau/2$, поскольку по условию задачи $v_1/2 < v_2$.

Легковой автомобиль догонит грузовик спустя время T после начала движения, которое определяется из уравнения

$$v_2 T = \frac{v_1 \tau}{2} + v_1 (T - \tau),$$

откуда

$$T = \frac{v_1 \tau}{2(v_1 - v_2)}. \quad (2.1.2)$$

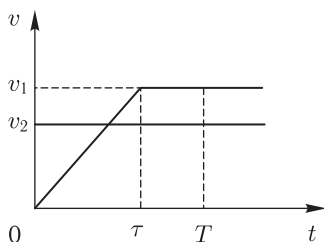


Рис. 2.2.

Видно, что время T обратно пропорционально ускорению автомобиля, равному v_1/τ . Поэтому второй вопрос в условии задачи предпочтительнее задавать в таком виде: во сколько раз время, необходимое для обгона грузовика, больше времени разгона автомобиля? С помощью (2.1.2) находим, что

$$\frac{T}{\tau} = \frac{v_1}{2(v_1 - v_2)}.$$

При решении кинематических задач часто возникает проблема выяснения физического смысла получаемых отрицательных корней уравнений. Особенно актуальна эта проблема при получении отрицательных значений времени, которые часто без всякого исследования объявляются не имеющими физического смысла, в частности в тех случаях, когда наряду с отрицательными появляются и положительные корни. Соответствующий пример приведен в гл. 1 (задача 1.30).

Задача 2.3. С какой наименьшей скоростью $v_{\min}$ относительно воды должна плыть лодка, чтобы из заданной точки A на одном берегу реки попасть в заданную точку B на другом берегу, находящуюся ниже по течению реки на расстоянии S ? Берега реки параллельны, а скорость течения постоянна и равна u . Ширина реки равна l .

Скорость лодки относительно берега $\mathbf{V}$ равна векторной сумме скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, где $\mathbf{v}$ — постоянная скорость лодки относительно воды:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}. \quad (2.1.3)$$

Отправляясь из точки A , лодка при неизменной скорости $\mathbf{V}$ попадет в точку B , если вектор $\mathbf{V}$ направлен вдоль прямой AB (см. рис. 2.3, а), или левее нее: тогда по достижении противоположного берега можно выключить мотор и лодку течением снесет до точки B .

Нужное направление вектора $\mathbf{V}$ может быть получено при разных векторах $\mathbf{v}$ (см. рис. 2.3, б). Скорость течения $\mathbf{u}$ постоянна и изображается одним и тем же вектором $\mathbf{u}$ при любых скоростях $\mathbf{v}$ лодки относительно воды.

Величина v будет наименьшей, когда вектор $\mathbf{V}$ направлен вдоль прямой AB , а $v_{\min}$ перпендикулярна этой прямой, как показано

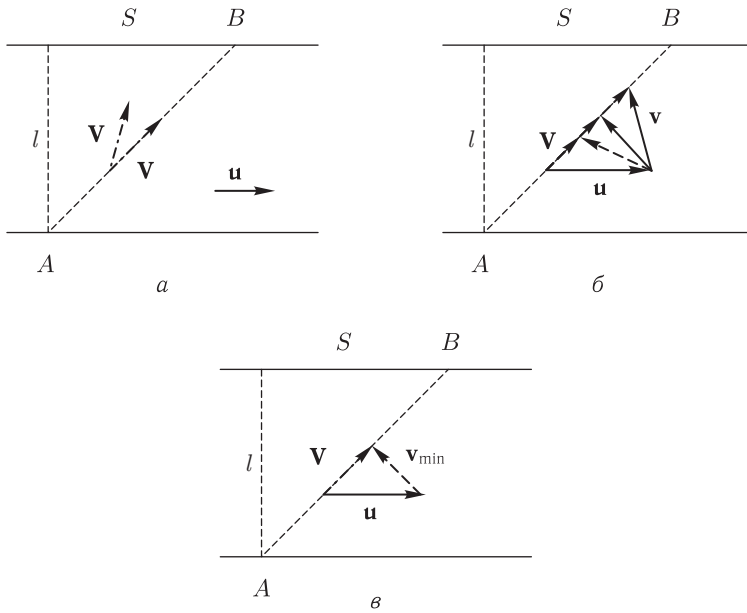


Рис. 2.3, а, б, в.

на рис. 2.3, в, где отчетливо просматриваются подобные треугольники. В результате для $v_{\min}$ получаем, составляя отношение сходственных сторон:

$$v_{\min} = u \frac{l}{\sqrt{l^2 + S^2}}. \quad (2.1.4)$$

Полученный ответ удовлетворяет очевидным предельным случаям: при $u = 0$ скорость лодки может быть пренебрежимо малой — в стоячей воде лодка при самой малой скорости в конце концов приплывет в точку B ; при $S = 0$ из (2.1.4) следует, что $v_{\min} = u$ — чтобы переправиться точно поперек реки скорость лодки v по модулю должна быть не меньше u .

В этой задаче можно задать и другие интересные вопросы, например, сколько времени t будет плыть лодка от A до B при скорости $v_{\min}$, даваемой формулой (2.1.4), и на какое минимальное расстояние $S_{\min}$ снесет лодку вниз по течению, если ее скорость относительно воды равна v . Ответ на первый вопрос находим с помощью полученных выражений:

$$t = \frac{AB}{V} = \frac{l^2 + S^2}{uS}.$$

Для ответа на второй вопрос построим геометрический образ уравнения (2.1.3). При $v > u$ видно, что конец вектора $\mathbf{v}$ может лежать

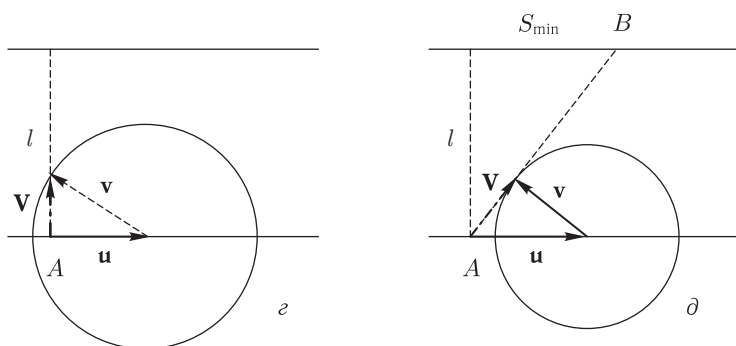


Рис. 2.3, з, д.

в любой точке окружности радиусом v с центром, помещенным в конец вектора $\mathbf{u}$ (см. рис. 2.3, з). Сразу видно, что при $v < u$ снос лодки вниз по течению неизбежен.

При $v > u$ можно выбрать такое направление вектора $\mathbf{v}$ (показанное на рис. 2.3, з), что сноса лодки вообще не будет. Более того, в этом случае можно вообще причалить к противоположному берегу выше по течению.

При $v < u$, как видно из следующего рис. 2.3, д, снос лодки будет минимальным, если вектор $\mathbf{V}$ направлен по касательной к окружности радиусом v . Опять сравнивая подобные треугольники, находим величину минимального сноса лодки $S_{\min}$:

$$S_{\min} = l \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \quad (v < u).$$

Легко проверяется предельный случай: при $v = u$, $S_{\min} = 0$ — снос отсутствует.

Задача 2.4. Лежащий на земле цилиндрический резервуар имеет радиус R . При какой наименьшей скорости $\mathbf{v}_0$ брошенный с поверхности земли камень может перелететь через резервуар? Откуда его следует бросать?

Проведем формально менее общее решение этой задачи по сравнению с изложенным в книге [10], где на основе единых соотношений исследуются две различные возможные траектории полета камня. Здесь мы рассмотрим эти траектории по отдельности, что приведет к менее громоздким преобразованиям по сравнению с решением в книге [10]. Среди возможных траекторий полета камня можно остановиться на двух возможных «претендентах», реализующих минимальное значение начальной скорости камня. Эти траектории показаны на рисунке.

При использовании первой траектории полета камня высшая точка траектории совпадает с вершиной резервуара: камень в полете

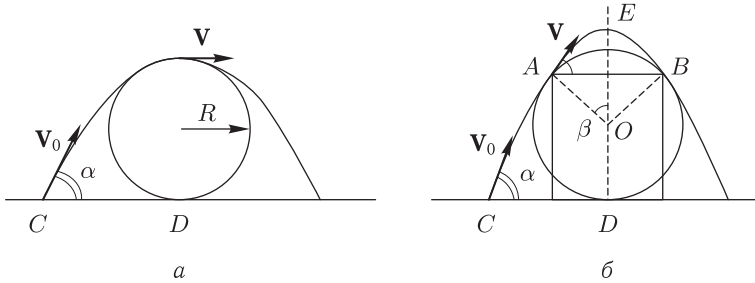


Рис. 2.4, а, б.

не поднимается выше, чем нужно. Обозначая через v горизонтально направленную скорость камня в высшей точке траектории, имеем

$$v = v_0 \cos \alpha. \quad (2.1.5)$$

Максимальная высота подъема, равная $2R$, связана с характеристиками начальной скорости $\mathbf{v}_0$ соотношением

$$2R = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.1.6)$$

В верхней точке траектории камень движется по касательной к поверхности резервуара. Чтобы он не давил на поверхность, должно выполняться условие

$$\frac{v^2}{R} \geq g. \quad (2.1.7)$$

Наименьшему возможному значению скорости соответствует знак равенства в этом выражении. С помощью соотношения (2.1.5) перепишем это равенство в виде

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R} = g. \quad (2.1.8)$$

Выражая из равенств (2.1.6) и (2.1.8) $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ и складывая эти выражения, получаем для начальной скорости соотношение

$$v_0^2 = 5gR. \quad (2.1.9)$$

При этом находим, что $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$. Для расстояния S , равного длине отрезка CD , справедливо:

$$S = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2R.$$

Однако необходимо исследовать и вторую возможную траекторию, при которой летящий камень дважды касается поверхности цилиндра в симметричных точках A и B . При этом угол β между касательной к поверхности цилиндра в точке A и горизонталью должен

равняться $\pi/4$, так как именно при таком угле будет наименьшей по модулю скорость $\mathbf{v}$ камня в точке A , необходимая для преодоления горизонтального расстояния AB . При этом еще необходимо проверить, что, двигаясь дальше от точки A к точке B , камень все время будет находиться выше поверхности цилиндра.

Проверим сначала выполнение именно этого условия. Расстояние по горизонтали между точками A и B при $\beta = \pi/4$ равно $R\sqrt{2}$, как следует из геометрических соображений. Поэтому

$$\frac{v^2}{g} = R\sqrt{2}. \quad (2.1.10)$$

Это равенство соответствует минимальной скорости v , как следует из соотношения

$$R\sqrt{2} = \frac{v^2}{g} \sin 2\beta, \quad \text{при } \beta = \pi/4.$$

Теперь для максимальной высоты подъема h , считая от точки A , при $\beta = \pi/4$ получим:

$$h = \frac{R\sqrt{2}}{4}. \quad (2.1.11)$$

Высота h превосходит расстояние, измеренное по вертикали, от точки A до вершины резервуара, равное, как легко убедиться из геометрических соображений, $R(1 - \sqrt{2}/2)$.

Теперь определим начальную скорость камня v_0 при условии, что его скорость в точке A соответствует выражению (2.1.10). Очевидно, что

$$v_0^2 = v^2 + 2gR \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2gR \left(1 + \sqrt{2}\right). \quad (2.1.12)$$

Сравнение выражений (2.1.9) и (2.1.12) показывает, что при второй траектории камня начальная скорость будет меньше по модулю, хотя и незначительно.

Угол, образуемый вектором $\mathbf{v}_0$ с горизонтом при второй траектории определяется выражением $v_0 \cos \alpha = v \cos \beta$, которое при $\beta = \pi/4$ и с учетом (2.1.10), с помощью соотношения (2.1.12) принимает вид

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2} + 2)}}. \quad (2.1.13)$$

Значение $\sin \alpha$ проще всего найти с помощью основного тригонометрического тождества:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 3/2}{\sqrt{2} + 2}}.$$

Расстояние S , равное длине отрезка CD , можно, как и раньше, найти, умножив горизонтальную составляющую начальной скорости v_0 на время подъема камня от поверхности земли на максимальную высоту:

$$S = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 3/2}}{2(1 + \sqrt{2})}.$$

С учетом (2.1.12) окончательно получаем:

$$S = R\sqrt{\sqrt{2} + 3/2}.$$

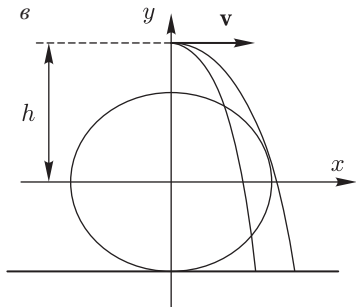


Рис. 2.4, в.

Полезно рассмотреть и другой способ решения, основанный на обратности движения тела, брошенного под углом к горизонту. Для этого будем рассматривать движение камня, летящего горизонтально из точки, лежащей на высоте h над осью цилиндра, и найдем условие, при котором траектория камня будет касаться цилиндра и конечная скорость камня при этом будет минимальной (рис. 2.4, в).

Прежде всего, выразим конечную скорость v_0 через параметры обратной задачи. Проекция скорости на горизонтальную ось остается неизменной, то есть равной v_1 . Движение по вертикали равноускоренное, поэтому квадрат вертикальной проекции скорости равен $2g(h + R)$. В результате получаем:

$$v_0^2 = v_1^2 + 2g(h + R). \quad (2.1.14)$$

Нам необходимо найти минимум этого значения при условии, что h и v_1 связаны условием касания кривой траектории и окружности цилиндра.

Выберем систему координат, как показано на рисунке. Тогда уравнение траектории имеет вид

$$y = h - \frac{g}{2v_1^2}x^2. \quad (2.1.15)$$

Уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.1.16)$$

Достаточно очевидно, что при малых скоростях v_1 траектория будет дважды пересекать окружность (рис. 2.4, в). Найдем точки

пересечения. Выражая x^2 из уравнения (2.1.16) и подставляя в уравнение (2.1.15), получим уравнение для y :

$$y^2 - \frac{2v_1^2}{g}y + \frac{2v_1^2}{g}h - R^2 = 0. \quad (2.1.17)$$

Два корня этого уравнения, как можно предположить, соответствуют двум точкам пересечения траектории полета и окружности. Корни вещественны, если дискриминант уравнения не отрицательный, что можно записать в виде

$$\frac{1}{4}D = \left(\frac{v_1^2}{g}\right)^2 - 2h\frac{v_1^2}{g} + R^2 \geq 0. \quad (2.1.18)$$

Из выражения для дискриминанта видно, что при малых скоростях всегда есть два вещественных решения, которые, очевидно, соответствуют точкам пересечения (см. рис. 2.4, в). При увеличении скорости дискриминант убывает. Обращение дискриминанта в ноль означает, что корни уравнения (2.1.17) совпадают, то есть траектория полета камня касается окружности. Это условие можно записать в виде

$$h = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v_1^2}. \quad (2.1.19)$$

Заметим, что из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что величина h ограничена снизу:

$$h \geq 2\sqrt{\frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{gR^2}{2v_1^2}} = R.$$

Таким образом, мы получили связь между h и v_1 при всех требуемых значениях h , включая предельный случай $h = R$. Этому значению h соответствует значение скорости v_1 , равное:

$$v_{1m} = \sqrt{gR}.$$

Любому значению $h > R$, как следует из уравнения (2.1.19) соответствуют два значения скорости v_1 , одно из которых больше, а другое меньше значения v_{1m} :

$$v_1^{(1,2)} = \sqrt{gR \pm \sqrt{g(h^2 - R^2)}}.$$

Если при заданной величине h значения $v_1 < v_1^{(1)}$ соответствуют пересечению траектории тела с окружностью, то решения уравнения (2.1.17) при значениях $v_1 > v_1^{(2)}$ дают значения координат точки пересечения $y > R$ и $x^2 < 0$. Формально эти значения являются решениями системы уравнений (2.1.15) и (2.1.16), однако физического смысла не имеют.

Теперь значение квадрата конечной скорости получается подстановкой значения h из выражения (2.1.19) в выражение (2.1.14):

$$v_0^2 = 2v_1^2 + \left(\frac{gR}{v_1}\right)^2 + 2gR. \quad (2.1.20)$$

Минимум значения квадрата скорости v_0 находится из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$v_0^2 \geq 2\sqrt{2v_1^2 \cdot \left(\frac{gR}{v_1}\right)^2} + 2gR = 2gR(1 + \sqrt{2}). \quad (2.1.21)$$

Этот минимум соответствует значению скорости v_1 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}}. \quad (2.1.22)$$

Заметим, что это значение меньше, чем значение v_{1m} . Высоту h , соответствующую минимальной скорости, находим из уравнения (2.1.19):

$$h = \frac{3}{2\sqrt{2}} R. \quad (2.1.23)$$

Далее несложно найти точку, откуда нужно бросать тело и угол, под которым нужно его бросать. Координату x этой точки найдем, подставляя в уравнение траектории (2.1.15) $y = -R$ и значения v_1 и h из уравнений (2.1.22) и (2.1.23), соответственно:

$$S = \sqrt{3/2 + \sqrt{2}} R. \quad (2.1.24)$$

Тангенс угла α между направлением начальной скорости и горизонтом находится из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{\sqrt{2g(h+R)}}{v_1} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}. \quad (2.1.25)$$

Естественно, значение для косинуса угла получается то же, что и при предыдущем методе решения.

2.2. Динамика

Стандартная, встречающаяся практически во всех сборниках задач задача о двух грузах, подвешенных на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, может служить основой для анализа ряда тонких моментов, связанных с динамикой материальных точек.

Задача 2.5. Тела массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, трение отсутствует. В стандартном

варианте требуется определить ускорения грузов и силу натяжения нити. В более изощренных вариантах задают условие $m_1 \ll m_2$ и спрашивается, какую силу натяжения должна выдерживать нить. Наконец, можно спросить, с каким ускорением движется центр масс грузов.

Физическая модель явления четко сформулирована в условии задачи. В рамках этой модели модули ускорений грузов одинаковы, как и модули сил натяжения нитей, действующих на грузы и на блок. Сила $\mathbf{F}$ — сила, действующая на ось блока. Из сказанного следует, что

$$|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = |\mathbf{T}_3| = |\mathbf{T}_4| = T,$$

и, вследствие неподвижности блока,

$$F = 2T. \quad (2.2.1)$$

Уравнения движения грузов,

$$\begin{aligned} m_2 \mathbf{a}_2 &= m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T}_2, \\ m_1 \mathbf{a}_1 &= m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T}_1, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

в проекции на вертикальное направление приобретают вид ($m_1 < m_2$)

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T, \\ -m_2 a &= m_2 g - T. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

С помощью системы уравнений (2.2.3) находим:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (2.2.4)$$

При $m_2 \ll m_1$ с помощью второго из этих равенств имеем

$$T \approx 2m_2 g. \quad (2.2.5)$$

Именно такую силу натяжения должна выдерживать нить. Этот результат можно получить «на пальцах», если сообразить, что при $m_2 \ll m_1$ груз массой m_1 падает с ускорением, практически равным ускорению свободного падения g . Но тогда второй груз вследствие нерастяжимости нитей движется вверх с ускорением, модуль которого равен g . При этом, очевидно, тянущая его вверх сила натяжения нити должна быть вдвое больше силы тяжести $m_2 g$, т. е. равна $2m_2 g$.

Здесь появляется возможность обсуждения некоторых математических моментов, которое способствует более глубокому пониманию используемого приближения. Подставляя во второе уравнение (2.2.3) приближенное значение $a \approx g$, получаем $T = 2m_2 g$, однако такая подстановка в первое уравнение дает $T = 0$.

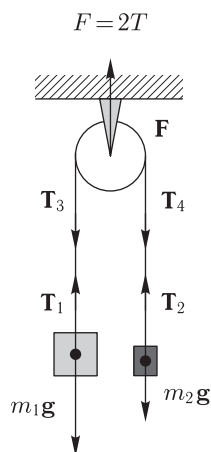


Рис. 2.5.

Объяснение кажущегося парадокса заключается в том, что подстановка приближенного значения $a \approx g$ «развязывает» систему уравнений (2.2.3), которые становятся независимыми и не обязаны иметь совпадающие решения. При этом отметим, что даваемые независимыми уравнениями различные значения T очень разумны с физической точки зрения. Тело массой m_2 поднимается вверх, и действующая на него сила натяжения нити равна $2m_2g$. Тело массой m_1 в принятом приближении падает с ускорением свободного падения, т. е. оно «невесомо» и не натягивает привязанную к нему нить, т. е. $T = 0$.

Интересно обратить внимание на то, что относительная точность получаемых ответов одинакова.

Действительно, сила натяжения нити T выражается в принятом приближении через параметры разных тел: сила $T = 2m_2g$ вдвое больше действующей на m_2 силы тяжести, однако с такой же относительной точностью $T = 0$ по сравнению с m_1g . Относительная ошибка определения T из первого уравнения (2.2.3) при использовании приближения $a \approx g$ равна

$$\frac{\left| \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2} - 0 \right| g}{m_1g} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}. \quad (2.2.6)$$

Относительная ошибка при определении T из второго уравнения оказывается такой же:

$$\frac{\left| \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2} \right| g}{m_2g} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}. \quad (2.2.7)$$

Равенства (2.2.6) и (2.2.7) составляются одинаковым образом: в числителе берется модуль разности между точным значением T , даваемым равенством (2.2.4), и приближенным значением, получаемым с помощью одного из уравнений (2.2.3), а в знаменателе стоит сила тяжести, фигурирующая в этом уравнении.

Наконец, нахождение ускорения центра масс системы позволяет проиллюстрировать теорему динамики о том, что ускорение центра масс определяется векторной суммой всех внешних сил, действующих на систему, независимо от того, к каким телам системы эти силы приложены. В данном случае внешними являются три силы: сила тяжести $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$, а также сила $\mathbf{F}$, действующая на ось блока, который по условию задачи считается невесомым. Поэтому для ускорения центра масс справедливо следующее:

$$\mathbf{a}_ц = \frac{\mathbf{F} + (m_1 + m_2)\mathbf{g}}{m_1 + m_2}. \quad (2.2.8)$$

В проекции на вертикальную ось при учете равенства (2.2.1) получаем:

$$a_{\text{ц}} = \frac{m_1 + m_2 - \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}}{m_1 + m_2}g = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}g.$$

Отметим, насколько более сложным и громоздким получается определение ускорения центра масс системы, приведенное в задаче № 124 в книге [1], в котором не используется теорема о законе движения центра масс.

Задача 2.6. Блок, описанный в предыдущей задаче, отсоединяют от точки подвеса и, прикладывая силу F к его оси, перемещают вверх. Определите ускорение центра масс системы и ускорения грузов.

В таком варианте задачи сила натяжения нити T определяется приложенной внешней силой F . Поскольку масса блока считается равной нулю, то второй закон Ньютона, записанный для блока, приводит к условию $T = F/2$. Уравнения движения грузов записываются теперь в виде

$$\frac{F}{2} - m_1g = m_1a_{1,x}, \quad \frac{F}{2} - m_2g = m_2a_{2,x},$$

где $a_{1,x}$ и $a_{2,x}$ — проекции ускорений грузов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на ось, направленную вертикально вверх, в лабораторной системе отсчета. Отсюда немедленно находим:

$$a_{i,x} = \frac{F}{2m_i} - g, \quad i = 1, 2.$$

Обратим внимание на то, что ускорения грузов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ складываются из ускорений грузов относительно блока $\mathbf{a}'_1$ и $\mathbf{a}'_2$ и ускорения блока $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a},$$

В силу нерастяжимости нити модули ускорений $\mathbf{a}'_1$ и $\mathbf{a}'_2$ равны, т. е. $a'_{1,x} + a'_{2,x} = 0$. Для проекций $a_{1,x}$ и $a_{2,x}$ справедливо:

$$a_{1,x} = a_x + a'_{1,x}, \quad a_{2,x} = a_x + a'_{2,x},$$

где a и a' — модули ускорений блока и грузов относительно блока.

Записав уравнения движения грузов в виде

$$\frac{F}{2} - m_1g = m_1(a_x + a'_{1,x}), \quad \frac{F}{2} - m_2g = m_2(a_x + a'_{2,x}),$$

находим

$$a'_x = \frac{F}{4} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}, \quad a_x = \frac{F}{4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} - g.$$

Для выполнения условия задачи — перемещения блока вверх — проекция ускорения блока a_x должна быть положительна. Это означает, что сила F должна превосходить некоторое минимальное значение:

$$F_{\min} = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

При $m_1 = m_2$ ускорения грузов относительно блока отсутствуют. Ускорение центра масс $\mathbf{a}_ц$ в лабораторной инерциальной системе отсчета при равной нулю массе блока определяется выражением

$$a_{ц,x} = \frac{F - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2},$$

где $a_{ц,x}$ — проекция $\mathbf{a}_ц$ на направленную вертикально вверх ось x .

Задача 2.7. Найдите силу натяжения нитей и ускорения грузов в системе, показанной на рисунке. Массы грузов m_1 и m_2 много больше масс блоков и нитей. Трение отсутствует.

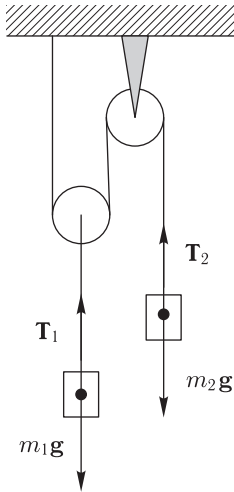


Рис. 2.7, а.

Условие задачи приводит к простейшей физической модели системы. Сила натяжения перекинутой через бока нити одинакова по всей ее длине. Отсутствие массы у подвижного блока приводит к условию $T_1 = 2T_2$.

Уравнения движения грузов в указанных на рис. 2.7, а обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 &= m_1\mathbf{a}_1, \\ m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 &= m_1\mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Причем условие нерастяжимости нитей означает следующее равенство для модулей ускорений: $2a_1 = a_2$.

1. Предположим, что груз массой m_1 движется с ускорением, направленным вверх. Тогда проектируя уравнения (2.2.9) на вертикальную ось, получаем:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a_1, \\ T_2 - m_2g &= -m_2a_2. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

После учета указанных соотношений между силами T_1 и T_2 и ускорениями a_1 и a_2 эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 2T_2 - m_1g &= m_1\frac{a_2}{2}, \\ T_2 - m_2g &= -m_2a_2. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2}g, \\ T_2 &= \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2}g. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Видно, что модуль силы натяжения нити T_2 всегда положителен, как и должно быть. Модуль a_2 положителен при $2m_2 - m_1 > 0$. Значит, при выполнении этого условия движение происходит так, как предположено: груз m_1 имеет ускорение, направленное вверх, а груз m_2 — вниз. При $2m_2 - m_1 < 0$ движение грузов происходит в противоположные стороны, но модуль ускорения a_2 , даваемый первым равенством (2.2.12), правилен. Чтобы убедиться в этом, можно предположить, что ускорение груза m_2 направлено вверх, а груза m_1 — вниз. Теперь при проектировании уравнений (2.2.9) на ту же ось знаки левых частей уравнений (2.2.10) останутся прежними, а знаки правых частей заменятся на противоположные.

2. Можно не предполагать заранее направления ускорений грузов.

Но при этом, проектируя уравнения (2.2.9) на вертикальную ось, мы действительно находим проекции векторов, стоящих в левых частях этих уравнений, поскольку известны их направления, и обозначаем через $a_{1,x}$ и $a_{2,x}$ проекции векторов, стоящих в правых частях уравнений. Получаем:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a_{1,x}, \\ T_2 - m_2g &= m_2a_{2,x}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Соотношение между проекциями ускорений имеет вид

$$a_{2,x} = -a_{1,x}. \quad (2.2.14)$$

Учитывая связь между модулями сил натяжения $T_1 = 2T_2$, получаем, решая систему уравнений (2.2.13) и (2.2.14):

$$a_{2,x} = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g, \quad T = \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2}g. \quad (2.2.15)$$

Уравнения (2.2.9) проектировались на ось, направленную вверх. При $m_1 > 2m_2$ проекция $a_{1,x}$ положительна, значит при этом условии ускорение груза m_2 направлено вверх, а при $m_1 < 2m_2$ — вниз, как и было получено при первом способе рассуждений.

Обратим внимание на то, что при решении задач, когда направления ускорений не могут быть определены заранее, нужно четко придерживаться одного из указанных способов решения, не допуская путаницы используемых понятий.

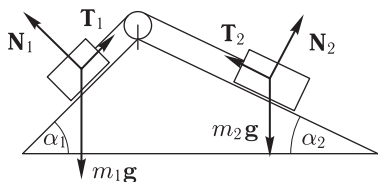


Рис. 2.7, б.

При решении задач на расчет движения грузов в системе, изображенной на рис. 2.7, б, следует четко различать случаи, когда отсутствует или присутствует трение.

В первом случае направление всех действующих на грузы сил известны и, составив векторные уравнения второго закона Ньютона для каждого груза, можно спроектировать их на оси систем координат, выбираемых для каждого груза таким образом, чтобы они были направлены вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости. Подчеркнем, что все эти различные системы координат для каждого груза связаны с одной лабораторной инерциальной системой отсчета. Направление движения может быть выбрано произвольно. В частности для изображенной на рисунке системы имеем:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{N}_1 + m_1 \mathbf{g} = m_1 \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_2 + m_2 \mathbf{g} = m_2 \mathbf{a}_2,$$

$$|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = T,$$

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a.$$

Предположив, например, что движение происходит вправо, получим:

$$T - m_1 g \sin \alpha_1 = m_1 a,$$

$$-T + m_2 g \sin \alpha_2 = m_2 a.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$a = \frac{m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1}{m_1 + m_2} g,$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} g.$$

Видно, что натяжение нити T всегда положительно. Если выражение для ускорения окажется отрицательным, то движение первоначально покоившихся грузов в действительности происходит влево. Отметим, что полученное выражение удовлетворяет предельному случаю $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$.

Иная ситуация реализуется при наличии трения. В этом случае появляется определенный парадокс: чтобы определить направления действующих на грузы сил трения, нужно знать направления их движения. Но чтобы определить направления движения, нужно знать направления сил трения, чтобы в явном виде выполнить проектирование векторных уравнений. Если скольжение грузов происходит по неподвижным поверхностям, то справедливо следующее утверждение:

движение при наличии трения происходит в том же направлении, что и в отсутствие трения, или отсутствует вообще. Это сразу сокращает число вариантов, которые необходимо рассмотреть. При наличии движения модули сил трения скольжения определяются законом Кулона–Амонтона; в отсутствие движения модули сил трения покоя могут изменяться от нуля до максимального значения, которое, если не указано противное в условии, принимается равным значению силы трения скольжения. Детальный анализ возможных вариантов для изображенной на рисунке системы приведен в книге [10].

Сформулированное правило не действует в случаях, когда трение происходит между движущимися поверхностями. При этом движение отдельных грузов при наличии трения может происходить в другом направлении относительно лабораторной системы отсчета, чем в отсутствие трения.

Задача 2.8. *Определите ускорения всех грузов и силу натяжения нити в изображенной на рис. 2.8 системе, если между соприкасающимися поверхностями грузов с массами m и m_1 коэффициент трения равен μ , а между грузом m_1 и наклонной плоскостью трение отсутствует.*

В таких задачах, чтобы сделать решение более компактным, целесообразно задавать вопрос, при котором подвергается анализу только какой-нибудь один из возможных вариантов. Например, при каком условии брусок массой m будет иметь ускорение, направленное вверх вдоль наклонной плоскости.

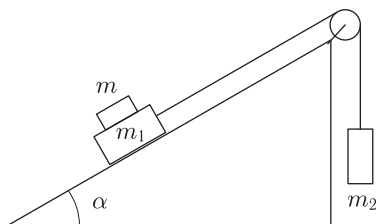


Рис. 2.8.

Ясно, что в отсутствие трения брусок массой m будет скользить вниз вдоль наклонной плоскости с ускорением a в лабораторной системе отсчета, равным $a = g \sin \alpha$. Поэтому сообщить ему ускорение, направленное вверх, может только сила трения, действующая со стороны бруска с массой m_1 . Это может быть сила трения скольжения или сила трения покоя. В первом случае брусок массой m должен двигаться вверх по наклонной плоскости медленнее бруска массой m_2 . Во втором случае эти бруски должны двигаться вверх вместе, с одинаковым ускорением.

Рассмотрим первый случай. Установим направления действия всех сил. Составляя уравнения движения всех грузов и проектируя их надлежащим образом на выбранные оси координат, приходим к уравнениям:

$$m_2 g - T = m_2 a_1, \quad (2.2.16)$$

$$T - m_1 g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha = m_1 a_1, \quad (2.2.17)$$

$$\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha = m a. \quad (2.2.18)$$

Из уравнения (2.2.18) следует, что ускорение a груза массой m равно

$$a = g(m \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (2.2.19)$$

Положительность этого выражения соответствует условию $\operatorname{tg} \alpha < \mu$, имеющему ясный физический смысл: трение должно быть достаточно большим, чтобы брусок массой m не скользил вниз по поверхности бруска массой m_1 .

Решая систему уравнений (2.2.16) и (2.2.17), определяем модуль ускорения брусков с массами m_1 и m_2 (и силу натяжения нити T , если задается такой вопрос):

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha_1 - \mu m \cos \alpha}{m_1 + m_2} g. \quad (2.2.20)$$

Положительность этого выражения приводит к неравенству:

$$m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu m \cos \alpha > 0. \quad (2.2.21)$$

Наконец, условие $a < a_1$, при котором возможен обсуждаемый случай, приводит при использовании выражений (2.2.19) и (2.2.20) к неравенству

$$m_2 (1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha) > (m_1 + m) \mu \cos \alpha, \quad (2.2.22)$$

которое следует рассматривать только при $\mu \neq 0$. В отсутствие трения, как мы видели, брусок с массой m всегда движется вниз по наклонной плоскости. Условие (2.2.22) следует рассматривать совместно с условием (2.2.19).

Во втором случае, когда бруски m и m_1 движутся вверх по наклонной плоскости с одинаковым ускорением, приходим к уравнениям:

$$m_2 g - T = m_2 a_1, \quad (2.2.23)$$

$$T - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}} = m_1 a_1, \quad (2.2.24)$$

$$F_{\text{тр}} - m g \sin \alpha = m a_1, \quad (2.2.25)$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, значение которой может изменяться в пределах:

$$m g \sin \alpha \leq F_{\text{тр}} \leq \mu m g \cos \alpha. \quad (2.2.26)$$

Система уравнений (2.2.23)–(2.2.25) позволяет найти три величины: a_1 , T и $F_{\text{тр}}$. Приведем значения a_1 и $F_{\text{тр}}$:

$$a_1 = \frac{m_2 - (m_1 + m) \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m} g, \quad (2.2.27)$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{m m_2 (1 + \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + m} g. \quad (2.2.28)$$

Причем выражение (2.2.28) для силы трения должно удовлетворять двойному неравенству (2.2.26).

Аналогично могут быть проанализированы и все другие варианты движений грузов в рассматриваемой системе.

Задача 2.9. Санки массой m перемещают равномерно по горизонтальной поверхности с помощью веревки, образующей некоторый угол α с горизонтом. Коэффициент трения равен μ . Считая санки материальной точкой, определите, какой наименьшей силой F_0 это можно сделать и какой угол α_0 с горизонтом образует при этом веревка.

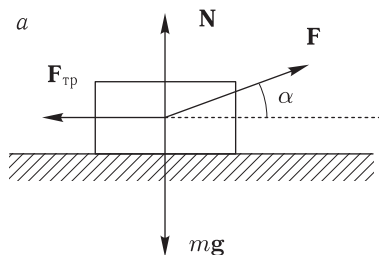


Рис. 2.9, а.

На рис. 2.9, а показаны действующие на санки силы. При отсутствии ускорения уравнение второго закона Ньютона записывается в виде

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = 0. \quad (2.2.29)$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси получаем уравнения:

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad (2.2.30)$$

$$F \sin \alpha + N - mg = 0. \quad (2.2.31)$$

Сила трения скольжения определяется законом Кулона–Амонтона

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Выражая N из уравнения (2.2.31) и подставляя значение силы трения в (2.2.30), получаем выражение для F :

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (2.2.32)$$

Минимальное значение F соответствует максимальному значению знаменателя в (2.2.32). Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha. \quad (2.2.33)$$

и введем вспомогательную величину

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.2.34)$$

Такая замена всегда возможна, поскольку тангенс в первом квадранте изменяется от нуля до бесконечности. Подставляя $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, перепишем выражение (2.2.33) следующим образом:

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \alpha = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Косинус угла φ имеет заданное положительное значение, определяемое формулой (2.2.34), поэтому максимальное значение $f(\alpha)$ получается при $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, то есть при $\alpha = \alpha_0 = \varphi$. Это максимальное значение равно $\frac{1}{\cos \varphi}$, подставляя которое в формулу (2.2.32), для минимального значения силы F_0 при учете равенства (2.2.34) получаем:

$$F_0 = \mu mg \cos \varphi = mg \sin \varphi. \quad (2.2.35)$$

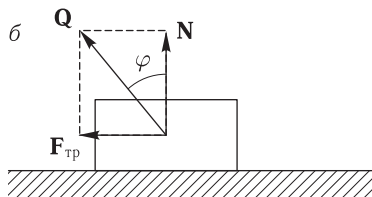


Рис. 2.9, б.

Задачу можно решить гораздо проще, если воспользоваться методом построения геометрического образа векторного уравнения (2.2.29). Для этого сначала обратим внимание на то, что векторную сумму сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ можно заменить их равнодействующей $\mathbf{Q}$, как показано на рис. 2.9, б.

При этом угол φ определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = F_{\text{тр}} / N = \mu.$$

Таким образом, угол φ , введенный выражением (2.2.34) при формальной замене переменной, имеет ясный физический смысл: это угол, образуемый равнодействующей силы трения скольжения и силы нормальной реакции опоры, входящей в закон Кулона–Амонтона, с нормалью к поверхности, по которой происходит скольжение.

Теперь векторное уравнение (2.2.29) переписываем в виде

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{Q} = 0.$$

Построим треугольник, соответствующий этому уравнению. Сначала откладываем силу тяжести $m\mathbf{g}$, заданную по величине и направлению. К концу вектора $m\mathbf{g}$ пристраиваем силу $\mathbf{Q}$, которая образует угол φ с вертикалью. Положение конца вектора $\mathbf{Q}$ неизвестно, но проведенный из этого конца вектор $\mathbf{F}$ заканчивается в точке, где начинается вектор $m\mathbf{g}$, как показано на рис. 2.9, в.

Очевидно, что минимальное значение модуля F_0 вектора $\mathbf{F}$ соответствует случаю, когда сила $\mathbf{F}$ перпендикулярна направлению действия силы $\mathbf{Q}$, как показано на рис. 2.9, г, причем $F_0 = mg \sin \varphi$, что совпадает с (2.2.35).

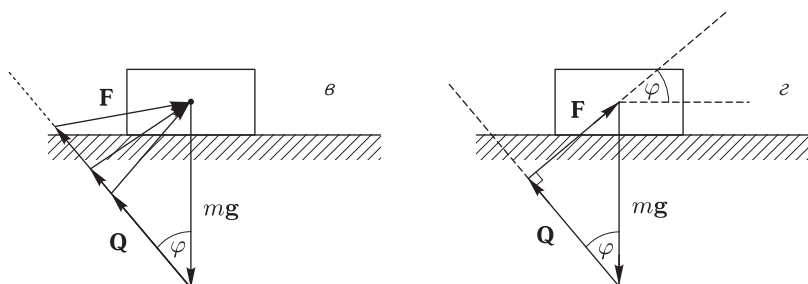


Рис. 2.9, в, г.

Показанные на этом рисунке углы φ одинаковы, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Изложенный способ решения может использоваться в случаях, когда санки перемещают с заданным ускорением по горизонтали, или по наклонной плоскости, равномерно или с заданным ускорением. Цикл таких задач представлен в книге [10]. Отметим, что их аналитическое решение сопряжено с очень громоздкими преобразованиями, в то время как метод геометрических образов уравнений приводит к компактному решению во всех указанных задачах.

Задача 2.10. Лента горизонтального транспортера движется с постоянной скоростью v . На ленту влетает брусок, движущийся с горизонтальной скоростью v_1 , направленной перпендикулярно краю ленты. При какой ширине ленты брусок достигнет ее противоположного края, если коэффициент трения скольжения бруска о поверхность ленты равен μ ? Какова траектория движения бруска в лабораторной системе отсчета?

В лабораторной системе отсчета скорость бруска при его движении по поверхности ленты не остается постоянной ни по модулю, ни по направлению. Иначе обстоит дело в системе отсчета, связанной с лентой транспортера, которая также является инерциальной, поскольку движется с постоянной скоростью в лабораторной системе отсчета. В системе отсчета, связанной с лентой, начальная скорость бруска $\mathbf{v}_0$ направлена под углом α к краю ленты, как показано на рис. 2.10, а, поскольку его скорость $\mathbf{v}_1$ в лабораторной системе отсчета равна векторной сумме скорости ленты $\mathbf{v}$ и скорости бруска $\mathbf{v}_0$ относительно ленты:

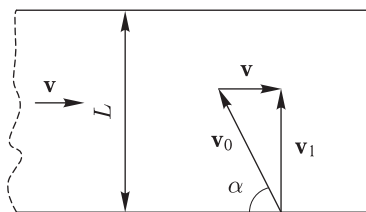


Рис. 2.10, а.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}. \quad (2.2.36)$$

Отсюда следуют равенства:

$$v_0 = \sqrt{v^2 + v_1^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v}. \quad (2.2.37)$$

Во введенной системе отсчета сила трения скольжения постоянна по модулю и по направлению, так как она направлена противоположно скорости $\mathbf{v}'$ бруска относительно ленты. Отсюда следует, что в этой системе отсчета брусок движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого равен $a = \mu g$. Путь, пройденный бруском относительно ленты до его остановки на ней, дается кинематическим выражением

$$S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v^2 + v_1^2}{2\mu g}, \quad (2.2.38)$$

где использовано первое из соотношений (2.2.37). При этом поперек ленты транспортера брусок переместится на расстояние $l = S \sin \alpha$. Подставляя сюда S из (2.2.38) и используя второе из соотношений (2.2.37), получаем

$$l = S \sin \alpha = S \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{v_1 \sqrt{v^2 + v_1^2}}{2\mu g}. \quad (2.2.39)$$

Если ширина ленты транспортера L меньше значения l , даваемого формулой (2.2.39), то брусок достигнет ее противоположного края и может упасть с ленты.

Движение бруска происходит с постоянным ускорением, одинаковым в обеих инерциальных системах отсчета. Поэтому траектория плоского движения бруска в лабораторной системе отсчета представляет собой параболу, как и в случае движения тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяготения Земли.

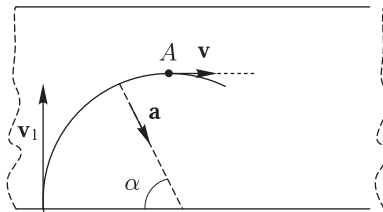


Рис. 2.10, б.

Легко видеть, что ось симметрии параболы направлена так же, как и ускорение, то есть образует угол α с краем ленты. В начальной точке траектории скорость $\mathbf{v}_1$ (в лабораторной системе отсчета) направлена поперек ленты. В точке остановки A относительно ленты (если она произойдет) скорость бруска в лабораторной системе отсчета равна

скорости ленты $\mathbf{v}$ и направлена вдоль ленты. Далее брусок движется вместе с лентой и в лабораторной системе отсчета его дальнейшая траектория — это прямая, параллельная краю ленты.

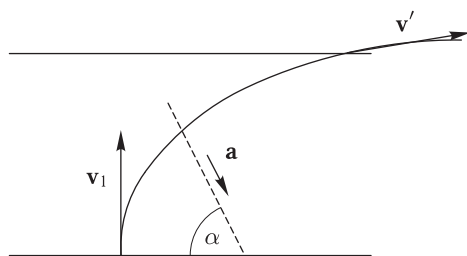


Рис. 2.10, в.

На рис. 2.10, в показана траектория бруска, когда он не останавливается относительно ленты. Скорость $\mathbf{v}'$ на этом рисунке — это скорость бруска относительно ленты при достижении ее противоположного края.

2.3. Законы сохранения энергии и импульса

Использование законов сохранения позволяет не только проще решать задачи по сравнению с динамическим подходом, но и разбирать ситуации, в которых использование законов динамики наталкивается на очень большие математические трудности.

Задача 2.11. *Песочные часы уравновешены на чашке весов. Нарушится ли равновесие, если часы перевернуть?*

Свободно падающие песчинки не давят на дно колбочки часов. Поэтому показания весов уменьшатся, как только песчинки начнут падать из отверстия в перемычке. Но как только первые песчинки достигнут дна, равновесие весов восстановится.

Пусть в единицу времени приходят в движение через отверстие песчинки, общая масса которых равна m . Падая с ускорением свободного падения, они достигают дна за время t , равное $t = \sqrt{2H/g}$ после начала падения. При стационарном действии часов в каждый момент времени в полете находится масса песчинок M , равная

$$M = mt = m\sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2.3.1)$$

Поэтому «недостача» силы давления на дно колбочки составляет

$$Mg = m\sqrt{2gH}. \quad (2.3.2)$$

При стационарном потоке масса песчинок, достигающих дна в единицу времени, также равна m . Каждая из песчинок подлетает ко дну со скоростью, равной $v = \sqrt{2gH}$, и импульс, передаваемый дну в единицу времени, равен

$$mv = m\sqrt{2gH}. \quad (2.3.3)$$

Это определяет «добавочную» силу давления на дно за счет остановки песчинок. Поскольку выражения (2.3.2) и (2.3.3) одинаковы, то равновесие весов восстанавливается при достижении дна первыми песчинками.

На последнем этапе действия часов, когда все песчинки уже провалятся сквозь отверстие, но еще не достигнут дна, показания весов увеличатся. Равновесие восстановится, когда последние песчинки ударятся о дно колбочки.

Можно привести иное решение задачи, основанное на законе изменения импульса системы тел. Рассмотрим в качестве такой системы песочные часы с песком внутри. На систему действуют внешние силы — сила тяжести, действующая на песочные часы и сила давления со стороны весов, которая по третьему закону Ньютона равна показанию весов. По закону изменения импульса системы сумма внешних сил равна изменению импульса системы в единицу времени. Пока песчинки не падают, внешние силы скомпенсированы, то есть показания весов равны силе тяжести. Когда песчинки падают, импульс системы направлен вниз. С момента, когда песчинки начинают падать и до момента, пока песчинки не достигнут дна импульс системы увеличивается, следовательно, сумма внешних сил направлена вниз, то есть сила давления на весы меньше силы тяжести. Когда поток песка непрерывен, импульс системы не изменяется, и весы показывают значение силы тяжести. Когда поток песчинок уменьшается (в верхней чашке нет песка), импульс системы уменьшается, и, следовательно, сила давления на весы превосходит силу тяжести.

Задача 2.12. *От третьей ступени ракеты-носителя, движущейся по орбите вокруг Земли со скоростью $\mathbf{v}_1$, отделяется головная часть массой m_1 . С какой скоростью $\mathbf{v}_2$ стала двигаться ракета-носитель, если скорость головной части изменилась на $\Delta\mathbf{v}$? Масса ракеты-носителя без головной части равна m .*

При отделении головной части возможно совершение работы за счет имеющихся источников энергии на борту, поэтому механическая энергия системы может не сохраняться. Иначе обстоит дело с законом сохранения импульса.

Если отделение головной части происходит достаточно быстро, то импульсом силы тяжести за это время можно пренебречь.

В результате закон сохранения импульса системы имеет вид

$$(m + m_1) \mathbf{v}_1 = m_1 (\mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}) + m \mathbf{v}_2. \quad (2.3.4)$$

После приведения подобных членов получим:

$$m \mathbf{v}_1 = m_1 \Delta \mathbf{v} + m \mathbf{v}_2. \quad (2.3.5)$$

Способ решения получившегося векторного уравнения наиболее компактным способом зависит от того, как направлено изменение скорости головной части $\Delta \mathbf{v}$. Если $\Delta \mathbf{v}$ сводится только к увеличению модуля скорости без изменения ее направления, то проще всего спроектировать (2.3.5) на направление движения. Обозначив проекцию $\mathbf{v}_2$ на выбранное направление через v_{2l} , получим

$$mv_1 = m_1 \Delta v + mv_{2l}. \quad (2.3.6)$$

Подчеркнем, что v_1 и Δv в равенстве (2.3.6) обозначают модули векторов $\mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}$, так как, зная их направление, мы в явном виде выполнили проектирование. Напротив, v_{2l} — это обозначение проекции $\mathbf{v}_2$, так как направление скорости неизвестно, и ее проекция может иметь оба знака. Из (2.3.6) находим

$$v_{2l} = \frac{mv_1 - m_1 \Delta v}{m}.$$

Если при расчетах окажется, что $v_{2l} > 0$, то после отделения головной части ракета-носитель продолжит двигаться в ту же сторону. Если $v_{2l} < 0$, то ракета-носитель начинает двигаться в противоположную сторону, но при этом, разумеется, $|v_{2l}|$ равен модулю ее новой скорости.

Если вектор $\Delta \mathbf{v}$ не параллелен начальной скорости $\mathbf{v}_1$, то более удобным может оказаться решение уравнения (2.3.5) путем построения его геометрического образа.

Уравнение (2.3.4) записано в геоцентрической инерциальной системе отсчета. В каждый момент времени инерциальной является и система отсчета, связанная с ракетой-носителем. Эта система движется относительно геоцентрической системы со скоростью $\mathbf{v}_1$. В ряде случаев более удобной может оказаться запись закона сохранения импульса именно в этой системе отсчета, в частности, когда рассуждения ведутся в терминах изменений скоростей всех рассматриваемых тел. Обозначая изменение скорости ракеты-носителя при отделении головной части через $\Delta \mathbf{v}_2$ запишем закон сохранения импульса во введенной «сопутствующей» системе отсчета, учитывая, что полный импульс равен нулю:

$$m_1 \Delta \mathbf{v} + m \Delta \mathbf{v}_2 = 0. \quad (2.3.7)$$

Легко видеть, что уравнение (2.3.7) эквивалентно уравнению (2.3.5), поскольку для $\Delta \mathbf{v}_2$ по определению изменения скорости справедливо

$$\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Задача 2.13. Граната, брошенная со скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом α к горизонту, разбивается на два одинаковых осколка в высшей точке своей траектории. Один из осколков сразу движется вниз и падает на землю через промежуток времени t после разрыва гранаты точно под точкой разрыва. На каком расстоянии S от точки бросания гранаты падает на землю второй осколок?

При разрыве гранаты совершается работа за счет энергии взрывчатого вещества. Поэтому здесь и речи быть не может о сохранении механической энергии.

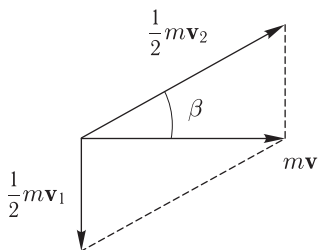


Рис. 2.13, а.

Рассмотрим полет гранаты до точки разрыва. Нетрудно убедиться с помощью кинематических соображений, что разрыв гранаты происходит на высоте

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (2.3.8)$$

над поверхностью земли в точке, отстоящей от точки бросания на расстоянии по горизонтали, равном

$$S_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (2.3.9)$$

Скорость гранаты v в точке разрыва направлена горизонтально и равна

$$v = v_0 \cos \alpha. \quad (2.3.10)$$

Разрыв происходит практически мгновенно, поэтому полный импульс осколков равен импульсу гранаты в момент разрыва:

$$m\mathbf{v} = \frac{m}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{m}{2}\mathbf{v}_2. \quad (2.3.11)$$

Треугольник, соответствующий векторному уравнению (2.3.11) имеет вид, показанный на рис. 2.13, а, поскольку скорость $\mathbf{v}_1$ одного из осколков направлена вертикально вниз, а скорость $\mathbf{v}$ гранаты в момент разрыва направлена горизонтально.

Скорость v_1 легко найти с помощью уравнения движения этого осколка:

$$H = v_1 t + \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2}. \quad (2.3.12)$$

С помощью изображенного на рисунке треугольника можно найти модуль и направление скорости $\mathbf{v}_2$ второго осколка:

$$v_2^2 = 4v^2 + v_1^2, \quad (2.3.13)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_1}{2v}. \quad (2.3.14)$$

Теперь можно найти дальность полета S_2 этого осколка по горизонтали от точки разрыва гранаты. Проектируя уравнение его движения, $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2 t_2 + \mathbf{g} t_2^2 / 2$, где t_2 — время полета осколка до точки падения, на вертикальную и горизонтальную оси с началом координат в точке взрыва, получаем

$$S_2 = v_2 \cos \beta t_2, \quad (2.3.15)$$

$$-H = v_2 \sin \beta t_2 - \frac{g t_2^2}{2}. \quad (2.3.16)$$

Из уравнения (2.3.16) находим время t_2 :

$$t_2 = \frac{v_2 \sin \beta}{g} + \sqrt{\frac{v_2^2 \sin^2 \beta}{g^2} + \frac{2H}{g}}. \quad (2.3.17)$$

Отметим, что только этот корень квадратного уравнения (2.3.16) имеет физический смысл в соответствии с условием задачи. С помощью (2.3.15) и (2.3.17) находим расстояние S_2 :

$$S_2 = \frac{v_2^2 \sin 2\beta}{2g} + v_2 \cos \beta \sqrt{\frac{v_2^2 \sin^2 \beta}{g^2} + \frac{2H}{g}}. \quad (2.3.18)$$

Дальность полета второго осколка S от точки бросания гранаты определяем с помощью (2.3.9) и (2.3.18):

$$S = S_1 + S_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{v_2^2 \sin 2\beta}{2g} + v_2 \cos \beta \sqrt{\frac{v_2^2 \sin^2 \beta}{g^2} + \frac{2H}{g}}. \quad (2.3.19)$$

Для получения явного выражения для S следует подставить в эту формулу полученные выражения для H , v_2 и β . Все выражения, начиная с (2.3.15), можно упростить, если учесть, что из закона сохранения импульса следуют равенства:

$$v_2 \cos \beta = 2v_0 \sin \alpha, \quad v_2 \sin \beta = v_1.$$

Эту задачу можно сделать более интересной, если не задавать условие, что один из осколков гранаты сразу после ее разрыва движется вниз. Тогда, наряду с приведенным рисунком, соответствующим

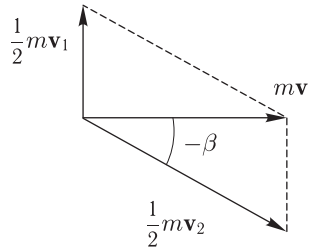


Рис. 2.13, б.

закону сохранения импульса при разрыве гранаты, возможен и такой, изображенный на следующем рис. 2.13, б.

В этом случае первый осколок летит сначала вертикально вверх, а затем падает на землю. Выбор варианта производится на основании сравнения заданного времени t полета этого осколка с временем t_0 свободного падения без начальной скорости с высоты H , на которой разрывается граната (2.3.8):

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.3.20)$$

Если окажется, что $t < t_0$, то реализуется разобранный в решении вариант, если $t > t_0$, — то второй. Исследование второго варианта можно произвести таким же образом, что и первого. Но методически правильнее (целесообразнее), не решая задачу целиком заново, проанализировать изменения, которые произойдут в приведенном решении при втором варианте движения осколков.

В этом случае уравнение (2.3.14) останется без изменений, а в выражении (2.3.12) для v_1 поменяется знак:

$$v_1 = -\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}.$$

В соответствии с формулой (2.3.14) нужно будет считать отрицательным угол β . При этом уравнения (2.3.15) и (2.3.16) останутся без изменения, что ясно и из физических соображений. Сохранит свой вид и формула (2.3.17), которую привычнее записать в виде

$$t_2 = \sqrt{\frac{v_2^2 \sin^2 \beta}{g^2} + \frac{2H}{g}} - \frac{v_2 \sin |\beta|}{g}. \quad (2.3.21)$$

Отсюда следует интересный результат: произведение значений t_2 , даваемых формулами (2.3.17) и (2.3.21), равно $2H/g$.

Задача. 2.14. Шарик подвешен на нерастяжимой невесомой нити, которая выдерживает натяжение в n раз большее, чем действующая на шарик сила тяжести. Нить отводят в сторону до горизонтального положения и отпускают шарик. Уцелеет ли нить при движении шарика вниз? Если она разорвется, то при каком положении относительно вертикали?

Рассмотрим нить в положении, характеризуемом углом α с вертикалью, предположив, что она еще не разорвалась. Проекция второго закона Ньютона на мгновенное направление нити имеет вид

$$T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l},$$

где смысл всех обозначений ясен из рис. 2.14, а.

Из этого уравнения следует, что с уменьшением угла α , когда нить приближается к положению равновесия, натяжение нити T увеличивается. Предельное значение T по условию задачи равно nmg , поэтому при угле α_1 , соответствующем разрыву нити, должно выполняться равенство

$$mg(n - \cos \alpha_1) = \frac{mv_1^2}{l}.$$

Откуда для скорости v_1 в момент разрыва нити получаем

$$v_1^2 = gl(n - \cos \alpha). \quad (2.3.22)$$

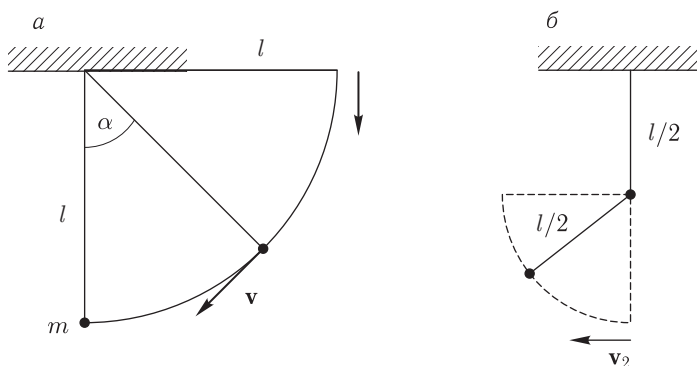


Рис. 2.14.

В отсутствие сил сопротивления движению скорость v_1 может быть найдена с помощью закона сохранения механической энергии. Считая потенциальную энергию равной нулю при горизонтальном положении нити, когда шарик неподвижен, имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - mgl = 0,$$

откуда

$$v_1^2 = 2gl \cos \alpha. \quad (2.3.23)$$

Сравнивая выражения (2.3.22) и (2.3.23), находим, что в момент разрыва нити

$$\cos \alpha_1 = \frac{n}{3}. \quad (2.3.24)$$

Очевидно, что $n > 1$, поскольку в противном случае нить не смогла бы удерживать даже неподвижно висящий шарик. Максимальное значение косинуса угла равно единице, поэтому условие (2.3.24) определяет интервал возможных значений n , при которых возможен разрыв нити:

$$1 < n \leq 3.$$

При $n = 3$ разрыв нити происходит при прохождении шариком положения равновесия. При $n > 3$ нить не разорвется.

Однако, если поставить на пути нити гвоздь на высоте, равной половине длины нити, на вертикали, соответствующей положению равновесия, то ситуация изменится (рис. 2.14, б).

Сразу после прохождения положения равновесия шарик будет двигаться по окружности вдвое меньшего радиуса. Учитывая, что его скорость v_2 в момент прохождения этого положения дается выражением $v_2^2 = 2gl$, проекция второго закона Ньютона на вертикальное направление сразу после прохождения точки равновесия будет иметь вид

$$T - mg = \frac{mv_2^2}{l/2} = 4mg,$$

или

$$T = nmg = 5mg.$$

Видно, что нить уцелеет, если $n \geq 5$. При $n < 5$ нить разорвется в момент прохождения положения равновесия. Но если нить не разрывается в этот момент, то она не разорвется и при дальнейшем движении шарика вверх.

Задача 2.15. Тепловоз массой M тянет за собой вагон массой m с постоянной скоростью по прямому горизонтальному участку пути. В некоторый момент времени вагон отделяется от тепловоза и останавливается, не используя тормозов, пройдя путь l . Каким будет расстояние S между тепловозом и вагоном в момент остановки вагона, если сила тяги тепловоза остается неизменной, а сопротивление движению не зависит от скорости.

Динамическое решение похожей задачи приведено в книге [10], № 2.53, где требуется определить путь L , проходимый тепловозом от момента отделения вагона до его остановки. К сожалению, в ходе решения появилась опечатка и в приводимом ответе следует поменять местами массы тепловоза и вагона M и m .

Динамическое решение предлагаемой здесь задачи основано на установлении того факта, что сила сопротивления F , действующая на вагон и приводящая к его остановке после отцепления, равна по модулю равнодействующей силы тяги тепловоза и действующей на тепловоз силе сопротивления. Эта равнодействующая сила сообщает тепловозу ускорение после отцепления вагона. В этом легко убедиться, поскольку силы, с которыми тепловоз и вагон действуют друг на друга при их общем равномерном движении, пропадают при отцеплении вагона. Равенство модулей этих сил вследствие третьего закона Ньютона доказывает приведенное утверждение. Отсюда следует, что

модули ускорений тепловоза a_1 и вагона a_2 после отцепления вагона обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{M}. \quad (2.3.25)$$

Обозначив скорость тепловоза и вагона до отцепления вагона через v , найдем время t , прошедшее до остановки вагона, учитывая, что его движение равнозамедленное: $t = v/a_2$.

Теперь для пути l , пройденного вагоном до остановки, получаем

$$l = \frac{v^2}{2a_2}, \quad (2.3.26)$$

а для пути L , пройденного тепловозом за то же время, получаем

$$L = vt + \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{v^2}{a_2} + \frac{a_1}{2} \cdot \frac{v^2}{a_2^2}.$$

С помощью соотношения (2.3.25) и формулы для времени t выражение для L перепишем в виде

$$L = \frac{v^2}{a_2} + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{v^2}{a_2} = \frac{v^2}{a_2} \left(1 + \frac{m}{2M} \right).$$

Окончательно при учете равенства (2.3.26) получаем

$$L = l \left(2 + \frac{m}{M} \right),$$

Так что расстояние S между паровозом и вагоном в момент его остановки равно

$$S = L - l = l \left(1 + \frac{m}{M} \right). \quad (2.3.27)$$

Эта задача имеет простое элегантное решение, основанное на использовании законов сохранения и изменения импульса и механической энергии. Полный импульс системы тепловоза и вагона остается неизменным до момента остановки вагона, поскольку сила сопротивления, действующая на вагон, и равнодействующая силы тяги тепловоза и действующей на него силы сопротивления равны по модулю и противоположны по направлению. Это приводит к равенству:

$$Mv_1 = (M + m)v, \quad (2.3.28)$$

где v_1 — скорость тепловоза в момент остановки вагона. Тепловоз и вагон движутся в одну сторону, но действующая на вагон сила сопротивления F совершает отрицательную работу, а равная ей по модулю сила, разгоняющая тепловоз, — положительную. Поэтому для изменения кинетической энергии системы получим:

$$FL - Fl = FS = \frac{Mv_1^2}{2} - \frac{(m + M)v^2}{2}. \quad (2.3.29)$$

Рассматривая изменение кинетической энергии останавливающегося вагона, получаем

$$Fl = \frac{mv^2}{2}.$$

Выражая из этого равенства силу F и подставляя в (2.3.29), после элементарных алгебраических преобразований приходим к равенству (2.3.27) для S .

Можно привести еще одно решение задачи, основанное также на законах изменения энергии и импульса системы. Рассмотрим систему оторвавшийся вагон + тепловоз. Поскольку, как было показано выше, сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю, центр масс системы движется с постоянной скоростью v . Пути, пройденные вагоном l_c и тепловозом L_c в системе центра масс, определяются из уравнений:

$$l_c + L_c = S, \quad ml_c = ML_c,$$

откуда следует, что

$$l_c = \frac{SM}{m + M}.$$

Поскольку в системе отсчета, связанной с землей, вагон перемещается на величину l , центр масс перемещается на величину $l + l_c$. Пусть вагон до остановки движется время t , тогда получаем уравнение

$$vt = l + \frac{SM}{m + M}. \quad (2.3.30)$$

С другой стороны, обозначая силу, действующую на вагон, через F , получим из закона изменения импульса и кинетической энергии вагона уравнения:

$$Ft = mv, \quad Fl = \frac{mv^2}{2}.$$

Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого уравнения, находим:

$$\frac{l}{t} = \frac{v}{2} \Rightarrow vt = 2l.$$

Подставляя значение vt в уравнение (2.3.30), легко получаем ответ, который был приведен выше.

Задача 2.16. Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, плавно переходящей в горизонтальную, и пройдя по ней некоторый путь, останавливается. Какую минимальную работу нужно совершить внешней силе, чтобы по тому же пути возвратить тело в исходную точку? Действующая на тело внешняя сила направлена вдоль траектории.

Остановка тела происходит за счет действия силы трения скольжения, при этом потенциальная энергия тела уменьшается от ее значения

в исходной точке, равного mgh , до нуля. Кинетическая энергия тела равна нулю в начальной и конечной точках, поэтому в балансе механической энергии тела в этих точках не участвует.

Наименьшая работа по возвращении тела в исходную точку по наклонной плоскости будет совершена, если кинетическая энергия в конечной точке будет равна нулю. Совершенная силой трения работа будет такой же, как и на спуске, поскольку действующая вдоль траектории движения внешняя сила не приводит к изменению силы реакции опоры, а значит, и силы трения. Таким образом, сумма работы A внешней силы, возвращающей тело в исходную точку, и отрицательной работы силы трения равна изменению потенциальной энергии тела:

$$A + A_{\text{тр}} = mgh.$$

Это означает, что минимальная работа внешней силы равна $2mgh$, то есть удвоенному запасу потенциальной энергии в начальном положении тела.

Подобный результат получается в самой простой модели, в которой пренебрегается особенностями прохождения телом участка на спуске, соответствующего переходу наклонной плоскости в горизонтальную поверхность.

Задача 2.17. На конце доски массой m находится небольшой брусок массой m_1 . Доска может скользить без трения по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ . Доске толчком сообщается горизонтальная скорость v_0 . При какой длине доски l она сможет выскользнуть из-под бруска?

Трение, действующее между бруском и доской, играет двойную роль: сила трения, действующая на доску, тормозит ее движение, а сила трения, действующая на брусок, разгоняет его. Так будет происходить до тех пор, пока либо доска выскользнет из-под бруска, либо их скорости сравняются, и они будут скользить вместе как единое тело, оставаясь неподвижными относительно друг друга.

Предположим, что скорости доски и бруска сравнялись и брусок, пройдя расстояние S вдоль доски, еще не дошел до ее противоположного конца. Трение между доской и поверхностью стола отсутствует, поэтому полный импульс системы «доска–брусок» сохраняется. В результате, если скорости бруска и доски сравнялись, то

$$mv_0 = (m + m_1)v,$$

откуда получаем скорость их движения v :

$$v = \frac{m}{m + m_1} v_0. \quad (2.3.31)$$

Теперь посчитаем изменение механической энергии системы в рассматриваемом случае. Очевидно, что работа силы трения, действующей на доску, отрицательна, а работа действующей на брусок силы трения положительна. Обозначив модули перемещений доски и бруска в инерциальной лабораторной системе отсчета через S_1 и S_2 и учитывая, что потенциальная энергия системы не изменится, приходим к равенству

$$\frac{(m + m_1)v^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgS_1 + \mu mgS_2. \quad (2.3.32)$$

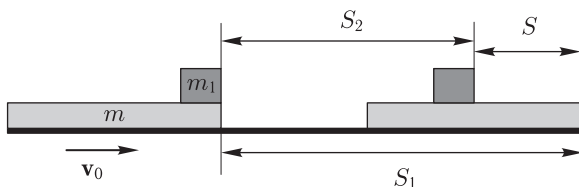


Рис. 2.17, а.

Как видно из рис. 2.17, а, $S = S_1 - S_2$, поэтому подставляя в уравнение (2.3.32) выражение для скорости v из (2.3.31), получаем:

$$S = \frac{1}{2} \frac{m}{m_1 + m_2} \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (2.3.33)$$

Если даваемое этим соотношением значение S окажется меньше длины доски l , то все будет именно так, как описано выше. Если же окажется, что $S > l$, то скорости доски и бруска не успеют сравняться, пока брусок движется по доске, и, достигнув ее противоположного конца, брусок свалится с доски. Итак, ответ на вопрос задачи выражается неравенством

$$l < S = \frac{1}{2} \frac{m}{m_1 + m_2} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Разобранная задача, конечно, допускает решение и с помощью законов динамики, которое будет более громоздким.

Обратим внимание на два существенных момента. Во-первых, всегда нужно записывать уравнение баланса энергии, рассматривая работу силы трения, и не используя расхожее выражение «работа против силы трения, совершенная за счет убыли энергии системы». Как видно на примере этой задачи, работа разных сил трения может иметь разные знаки, поэтому использование приведенного в кавычках способа рассуждений может привести к принципиальной ошибке. Во-вторых, при подсчете работы силы трения нужно рассматривать перемещение тела, на которое она действует, а не перемещение точки приложения силы.

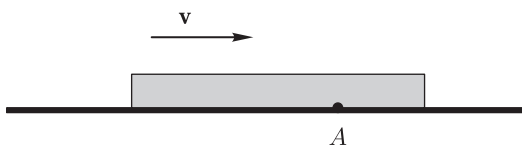


Рис. 2.17, б.

Это особенно ярко видно на следующем простом примере, показанном на рис. 2.17, б.

Движущаяся по гладкому столу доска испытывает трение только в одном месте A стола, где имеется шероховатость. Точка приложения силы трения не перемещается в лабораторной системе отсчета, но, тем не менее, сила трения совершает отрицательную работу, уменьшая кинетическую энергию доски.

Задача 2.18. Моторная лодка массой m , двигаясь по озеру со скоростью v , после выключения двигателя и останавливается, пройдя путь S . Считая силу сопротивления движению пропорциональной скорости, найдите значение коэффициента пропорциональности.

Запишем уравнение второго закона Ньютона и спроектируем его на направление движения лодки:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = kv. \quad (2.3.34)$$

Поскольку $\Delta S = v \Delta t$, то из (2.3.34) следует равенство

$$\Delta v = \frac{k}{m} \Delta S. \quad (2.3.35)$$

Коэффициент пропорциональности k/m между ΔS и Δv постоянен по условию задачи, поэтому соотношение (2.3.35) можно переписать для конечных величин v и S :

$$v = \frac{k}{m} S. \quad (2.3.36)$$

Интересно отметить, что равенство (2.3.36), переписанное в виде

$$mv = kS, \quad (2.3.37)$$

можно трактовать как следствие закона изменения импульса, поскольку слева стоит модуль изменения импульса лодки $|0 - mv|$. Следовательно, справа стоит модуль импульса силы сопротивления движению. Записывая закон изменения кинетической энергии в виде

$$-\frac{mv^2}{2} = -\overline{F}S, \quad (2.3.38)$$

где $\overline{F}$ — модуль средней силы сопротивления ($\overline{F} = k\overline{v}$), и подставляя сюда значение S из (2.3.37), видим, что для рассмотрения энергетических соотношений можно использовать понятие средней силы, равной $\overline{F} = kv/2$.

Таким образом, при рассмотрении явлений, в которых сила трения пропорциональна скорости, можно использовать закон изменения импульса в форме (2.3.37) и закон изменения механической энергии в форме (2.3.38).

Задача 2.19. В момент наибольшего сближения частиц при упругом лобовом столкновении их скорости одинаковы и равны $\mathbf{v}$. Каковы скорости этих частиц после столкновения, если до него они двигались со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$? Каково отношение масс этих частиц?

При лобовом столкновении скорости частиц в лабораторной системе отсчета направлены вдоль одной прямой.

Запишем закон сохранения импульса для двух этапов рассматриваемого процесса:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}, \quad (2.3.39)$$

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2, \quad (2.3.40)$$

где $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ — скорости частиц после столкновения. Подчеркнем, что закон сохранения импульса справедлив для любого этапа рассматриваемого процесса. Уравнение (2.3.39) определяет скорость частиц $\mathbf{v}$ при их наибольшем сближении. Легко видеть, что эта скорость $\mathbf{v}$ есть скорость движения центра масс сталкивающихся частиц. Уравнение (2.3.40) соответствует сохранению импульса системы после разлета частиц. Кинетическая энергия системы имеет одинаковые значения только перед столкновением и после разлета частиц. При сближении их кинетическая энергия частично (при $\mathbf{v} \neq 0$) или полностью (при $\mathbf{v} = 0$) превращается в потенциальную энергию их взаимодействия (энергию деформации, если сталкивающиеся частицы — упругие шары), которая при разлете снова превращается в кинетическую энергию. Поэтому закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (2.3.41)$$

В условии задачи не задано, летят ли частицы навстречу друг другу или одна догоняет другую, а задана только скорость в момент наибольшего сближения. Поэтому направим координатную ось x вдоль вектора $\mathbf{v}$, и через v_{2x} и v_{1x} будем обозначать проекции этих скоростей на ось x . Проекция же вектора $\mathbf{v}$ на эту ось всегда положительна и равна v .

В получившуюся систему трех уравнений можно ввести отношение масс частиц $\gamma = m_1/m_2$, эта система позволяет определить три неизвестные величины — v'_1 , v'_2 и γ . Система уравнений (2.3.39)–(2.3.41) симметрична относительно замены $v_1, v_2 \leftrightarrow v'_1, v'_2$ и имеет очевидное решение $v'_1 = v_1$, $v'_2 = v_2$, которое отражает обратимость во времени процесса упругого столкновения: можно считать, что v'_1 , v'_2 — это скорости до столкновения частиц, а v_1 , v_2 — после него. В этом случае система уравнений не позволяет определить γ . Однако такое решение не соответствует реальному столкновению частиц. Нахождение имеющего физический смысл решения требует проведения довольно громоздких преобразований, которые приводят к результату:

$$v'_{1x} = 2v - v_{1x}, \quad v'_{2x} = 2v - v_{2x}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2} = \frac{(v - v_{2x})}{(v_{1x} - v)}. \quad (2.3.42)$$

Величина γ положительна по определению, поэтому с учетом того, что проекции скоростей v_{2x} и v_{1x} могут быть как положительными, так и отрицательными, получаем неравенства $v_1 < v < v_2$, или $v_2 < v < v_1$.

Громоздких алгебраических преобразований можно избежать, если перейти в систему отсчета, связанную с центром масс системы. Эта система также является инерциальной, поскольку движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ относительно лабораторной системы. Скорости частиц до столкновения в системе центра масс равны $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}$. В системе центра масс при лобовом упругом столкновении скорости частиц просто меняют свое направление на противоположное, поэтому после столкновения они будут равны $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$. Чтобы определить значения скоростей в лабораторной системе отсчета, нужно к этим скоростям прибавить скорость центра масс. В результате получим значения v'_1 и v'_2 , совпадающие с (2.3.42). Обратим внимание на то, что при решении задачи в системе центра масс не пришлось использовать значение γ отношения масс частиц. Эту величину можно найти из уравнения (2.3.39), которое при таком решении определяет систему отсчета, связанную с центром масс. При этом в явном виде это уравнение, как и уравнения (2.3.40) и (2.3.41), не используются для определения скоростей v'_1 и v'_2 .

Задача 2.20. Искусственный спутник Земли движется по эллиптической орбите. Определите скорость движения в апогее, если скорость движения в перигее равна v_1 . Перигей и апогей орбиты находятся на расстояниях h_1 и h_2 от поверхности Земли, причем $h_1, h_2 \ll R$ — радиуса Земли.

Малость расстояний h_1 и h_2 по сравнению с радиусом Земли позволяет использовать для потенциальной энергии спутника выражения mgh_1 и mgh_2 , поскольку

$$\begin{aligned}
 E_n &= -G \frac{Mm}{R+h} = -G \frac{Mm}{R(1+h/R)} \frac{R^2}{R^2} = -G \frac{M}{R^2} m \frac{R}{1+h/R} \approx \\
 &\approx -mgR \left(1 - \frac{h}{R}\right) = -mgR + mgh. \quad (2.3.43)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $g = GM/R^2$, где M — масса Земли, и использована приближенная формула

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a, \quad \text{при } a \ll 1.$$

Использование соотношения (2.3.43) позволяет записать закон сохранения энергии при движении спутника:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (2.3.44)$$

Этого уравнения достаточно для определения v_2 при заданных значениях g , v_1 , h_1 и h_2 . Однако, должен выполняться еще и закон сохранения момента импульса (что соответствует второму закону Кеплера). Поскольку в апогее и перигее скорости перпендикулярны прямой, соединяющей их с центром Земли (т. е. большой оси эллипса, по которому движется спутник), то этот закон запишем в виде

$$v_1 (h_1 + R) = v_2 (h_1 + R), \quad (2.3.45)$$

Данное обстоятельство приводит к тому, что значение v_2 можно определить как с помощью уравнения (2.3.44), так и из уравнения (2.3.45). Поэтому значения трех задаваемых в условии задачи величин нельзя брать произвольно. К сожалению, в некоторых учебных пособиях задача решается только с использованием уравнения (2.3.44), причем числовые значения величин в условии задачи задаются несогласованным образом. В результате соотношение (2.3.45) дает совершенно неправильное значение для радиуса Земли R , причем это остается незамеченным, поскольку уравнение (2.3.45) вообще не используется.

Поэтому при решении этой задачи следует либо задавать согласованные значения v_1 , h_1 и h_2 и решать задачу с помощью закона сохранения энергии (2.3.44), либо, что предпочтительнее, задавать только характеристики перигея (v_1 и h_1) и радиус Земли R , ставя вопрос об определении обеих характеристик (v_2 и h_2) апогея. При этом, разумеется, следует подбирать разумное значение v_1 , обеспечивающее выполнение условия $h_1, h \ll R$.

Еще предпочтительнее задавать скорость v_1 в перигее, расстояние r_1 от перигея до центра Земли и радиус Земли R . Тогда, учитывая, что потенциальную энергию спутника в поле тяготения Земли можно

представить в виде

$$E_n = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{r} \frac{R^2}{R^2} = -mg \frac{R^2}{r_1},$$

решение задачи о нахождении характеристик v_2 и r_2 апогея сводится к использованию уравнений

$$\frac{mv_1^2}{2} - mg \frac{R^2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - mg \frac{R^2}{r_2}, \quad v_1 r_1 = v_2 r_2,$$

выражающих в используемых обозначениях законы сохранения энергии и момента импульса. Теперь уже не нужно заботиться об условии малости высот перигея и апогея по сравнению с радиусом Земли, но при этом задаваемое значение v_1 должно соответствовать эллиптической орбите движения спутника. Совсем произвольно можно задавать значения r_1 и r_2 для перигея и апогея (но $r_1, r_2 > R$!), ставя вопрос об определении v_1 и v_2 .

Использование законов сохранения энергии и импульса позволяет на элементарном уровне получить выражения для второй и третьей космической скорости и при этом более глубоко разобраться в роли этих законов и их проявлении в реальных физических процессах.

Задача 2.21. *Получите выражения для второй космической скорости v_{II} — скорости, которую необходимо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно могло преодолеть земное притяжение и навсегда удалиться от Земли.*

В простейшем приближении, считая Землю неподвижной, а связанную с ней систему отсчета (геоцентрическую) инерциальной, используем только закон сохранения энергии. Тогда механическая энергия тела у поверхности Земли складывается из кинетической энергии $E_k = mv_{II}^2/2$ и потенциальной энергии, для которой удобно воспользоваться выражением

$$E_n = -G \frac{mM}{R} = -mgR,$$

поскольку ускорение свободного падения у поверхности Земли дается выражением $g = GM/R^2$.

Удалившись от Земли на бесконечно большое расстояние, тело может остановиться, поэтому его кинетическую и потенциальную энергию можно считать равными нулю. В результате на основании закона сохранения энергии приходим к равенству:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - mgR = 0.$$

Отсюда для второй космической скорости получаем

$$v_{II} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2} v_I, \quad (2.3.46)$$

где v_I — первая космическая скорость.

Полученное выражение достаточно для практических целей, однако для возможности рассматривать более сложные задачи полезно вывести формулу для второй космической скорости в другой инерциальной системе отсчета — гелиоцентрической, связанной с Солнцем. Подчеркнем, что Солнце здесь фигурирует только как тело отсчета, а гравитационное взаимодействие с ним не рассматривается.

В этой системе отсчета, как нетрудно убедиться, необходимо учитывать и закон сохранения импульса. Если ограничиться только законом сохранения энергии, то ответ будет зависеть от скорости движения Земли вокруг Солнца (т.е. от скорости другой инерциальной системы отсчета), чего не может быть вследствие принципа относительности.

Обозначая через v скорость движения Земли до запуска тела, записываем закон сохранения энергии в виде:

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m(v_{II} + v)^2}{2} - mgR = \frac{m + M}{2} v_1^2, \quad (2.3.47)$$

где v_1 — скорость Земли после удаления тела. Такую же скорость имеет и удалившееся от Земли тело, поскольку, удалившись, оно будет неподвижным относительно Земли. При записи уравнения (2.3.47) предположено, что тело запускают в ту сторону, куда Земля движется по своей орбите.

Закон сохранения импульса при запуске тела в таком наиболее «выгодном» направлении имеет вид

$$Mv + m(v + v_{II}) = (M + m)v_1. \quad (2.3.48)$$

Выражая отсюда v_1 и подставляя в уравнение закона сохранения энергии (2.3.47), получим после простых, но довольно длинных алгебраических преобразований следующее выражение:

$$v_{II}^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) 2gR. \quad (2.3.49)$$

Квадрат второй космической скорости в (2.3.49) отличается от значения, полученного с помощью (2.3.46) множителем, пренебрежимо мало отличающимся от единицы, поскольку масса m запускаемого тела (ракеты) пренебрежимо мала по сравнению с массой Земли. Однако теперь становится понятно, как можно подойти к вычислению третьей космической скорости — скорости, двигаясь с которой у поверхности Земли, тело может покинуть солнечную систему.

Задача 2.22. *Определите третью космическую скорость v_{III} .*

Совершенно естественно, что рассмотрение следует проводить в гелиоцентрической системе отсчета, только теперь придется учитывать гравитационное взаимодействие Земли и запускаемого тела с Солнцем. Обозначим скорость Земли на орбите вокруг Солнца до запуска тела через v , а после запуска тела — через v_2 . Солнце считаем неподвижным, а улетевшее из солнечной системы тело на бесконечности может остановиться (относительно Солнца, а не Земли, как в предыдущей задаче!). Поэтому, учитывая, что потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли у ее поверхности равна $-mgR$, а его потенциальная энергия в поле Солнца равна $-GmM_c/r$, r — радиус орбиты Земли вокруг Солнца, записываем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{m(v + v_{III})^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} - mgR - G\frac{mM_c}{r} = \frac{Mv_2^2}{2}. \quad (2.3.50)$$

Потенциальная энергия Земли в поле тяготения Солнца не меняется, если Земля остается на своей орбите, поэтому соответствующее выражение в уравнении (2.3.50) отсутствует. Строго говоря, радиус земной орбиты должен немного измениться, однако соответствующая поправка не нужна, вследствие вводимого приближения,

$$\frac{M}{2}(v_2^2 - v^2) = \frac{M}{2}(v_2 + v)(v_2 - v) \approx Mv(v_2 - v), \quad (2.3.51)$$

в котором использовано приближенное равенство $(v_2 + v)/2 \approx v$.

Закон сохранения импульса записывается в виде

$$m(v + v_{III}) + Mv = mv_1 + Mv_2, \quad (2.3.52)$$

где v_1 — скорость тела у поверхности Земли сразу после запуска (т.е. срабатывания двигателей ракеты) в гелиоцентрической системе отсчета. Напомним, что v_{III} — это скорость тела относительно Земли. Скорость v_1 — это скорость тела, находящегося на круговой орбите вокруг Солнца, получив которую, оно покидает солнечную систему. Нетрудно сообразить, что эта скорость в $\sqrt{2}$ раз больше скорости v , с которой тело и Земля вращаются по круговой орбите вокруг Солнца.

Из уравнения (2.3.52) теперь получаем

$$M(v_2 - v) = m(v + v_{III} - v_1) = m(v_{III} - (\sqrt{2} - 1)v). \quad (2.3.53)$$

Уравнение (2.3.50) с учетом соотношений (2.3.51) и (2.3.53) приводит к равенству:

$$(v + v_{III})^2 - v_{II}^2 - 2v^2 = 2v(v_{III} - (\sqrt{2} - 1)v), \quad (2.3.54)$$

где учтено, что

$$v_{II}^2 = 2gR, \quad v^2 = \frac{GM_c}{r}.$$

Решая уравнение (2.3.54) относительно v_{III}^2 , находим

$$v_{\text{III}}^2 = v_{\text{II}}^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2. \quad (2.3.55)$$

Обратим внимание на то, что при записи уравнения закона сохранения импульса (2.3.52) мы пренебрегли влиянием Солнца на Землю и запускаемое тело за тот промежуток времени, пока запускаемое тело выходит из зоны земного тяготения.

Таким образом, закон сохранения импульса использовался в приближенном виде — только для определенного этапа процесса, а именно для выхода запускаемого тела только из зоны действия притяжения Земли. Попытка записать этот закон для всего рассматриваемого процесса привела бы к громоздким математическим трудностям, поскольку нам пришлось бы решать знаменитую «задачу трех тел», что возможно лишь в некоторых частных случаях. Отметим, что при этом закон сохранения энергии (2.3.50) записан для всего процесса в целом.

Найдем численные значения второй и третьей космических скоростей. Используя значение ускорения свободного падения у поверхности Земли g и радиус Земли R , находим $v_{\text{II}} = 11,2$ км/с. Скорость движения Земли на круговой орбите вокруг Солнца $v = 29,8$ км/с. Поэтому с помощью (2.3.55) получаем $v_{\text{III}} = 16,7$ км/с.

2.4. Статика

В равновесии векторная сумма всех внешних действующих на систему сил равна нулю. Равна нулю и векторная сумма моментов этих сил, причем моменты могут браться относительно любой, наиболее удобной для рассматриваемой системы точки. Если все силы расположены в одной плоскости, то условие равенства нулю суммы моментов сводится к одному скалярному уравнению, и возможно описание на языке моментов, вращающих тело по и против хода часовой стрелки.

В конкретных задачах, когда направление действующих сил не задано, именно условие для моментов часто позволяет определить направление действия сил.

Если система находится под действием только трех внешних сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке. В противном случае оказывался бы неуравновешенным момент одной силы относительно точки пересечения линий действия двух других сил.

Задача 2.23. *К гладкой вертикальной стене на нити длиной l подвешен однородный шар массой m . Какова сила натяжения нити, если радиус шара равен R ?*

Сила тяжести mg приложена в центре однородного шара. Через центр тяжести проходит и сила реакции опоры N , которая в отсутствие

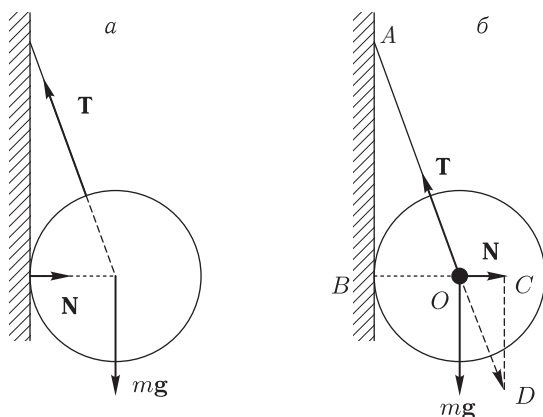


Рис. 2.23.

трения перпендикулярна стене (см. рис. 2.23, а) Но тогда и линия действия силы натяжения нити тоже должна проходить через центр шара.

После установления направления нити дальнейшее решение задачи не представляет труда. Векторная сумма сил равна нулю:

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0. \quad (2.4.1)$$

Это условие эквивалентно утверждению о подобии треугольников, показанных на следующем рис. 2.23, б.

Поэтому

$$\frac{T}{mg} = \frac{AO}{AB}. \quad (2.4.2)$$

Но $AO = l + R$, и для AB с помощью теоремы Пифагора имеем

$$AB = \sqrt{(l + R)^2 - R^2} = \sqrt{l(l + 2R)}.$$

Теперь из (2.4.2) находим

$$T = mg \frac{l + R}{\sqrt{l(l + 2R)}}.$$

Отметим, что учет трения шара о вертикальную стенку сразу делает эту задачу гораздо сложнее.

Задача 2.24. Какой наибольший угол с вертикалью может образовывать прислоненная к стене лестница, центр масс которой находится посередине лестницы? Коэффициент трения лестницы о пол равен μ_1 , а о стену — μ_2 .

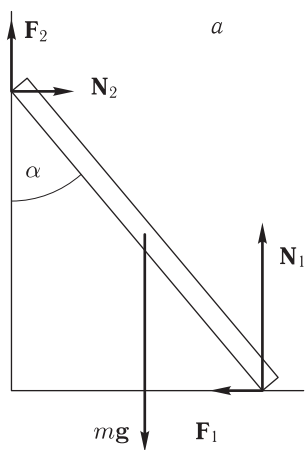


Рис. 2.24, а.

На рисунке показаны действующие на лестницу силы. Силы трения будем в дальнейшем обозначать как F_1 и F_2 . Наперед нельзя сказать, что модули этих сил связаны с N_1 и N_2 законом Кулона–Амонтона, поскольку величина силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения. Будем считать, что максимальные значения сил трения определяются законом Кулона–Амонтона.

В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнения для равновесия действующих сил имеют вид

$$N_2 - F_1 = 0, \quad N_1 + F_2 - mg = 0. \quad (2.4.3)$$

Уравнения равновесия для моментов сил относительно точки приложения силы тяжести запишем в виде

$$N_1 \sin \alpha = N_2 \cos \alpha + F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha. \quad (2.4.4)$$

Из этого соотношения следует выражение для тангенса угла наклона лестницы к вертикальной стене:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_2 + F_1}{N_1 - F_2}. \quad (2.4.5)$$

С помощью уравнений (2.4.3) выражению (2.4.5) можно придать следующий вид:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2N_2}{mg - 2F_2}. \quad (2.4.6)$$

Видно, что тангенс угла α будет тем больше, чем больше N_2 и F_2 . Максимальная сила трения F_2 равна $F_2 = \mu_2 N_2$. Из уравнения (2.4.3) следует, что N_2 тем больше, чем больше F_1 . Максимальное значение N_2 достигается при максимальном значении F_1 , то есть при $F_1 = \mu_1 N_1$. Таким образом, максимальный угол наклона лестницы к стене реализуется при максимально возможных значениях сил трения:

$$F_1 = \mu_1 N_1; \quad F_2 = \mu_2 N_2. \quad (2.4.7)$$

Подставляя соотношения (2.4.7) в уравнения (2.4.3), находим

$$N_2 = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} mg. \quad (2.4.8)$$

Теперь для F_2 получаем

$$F_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{1 + \mu_1 \mu_2} mg. \quad (2.4.9)$$

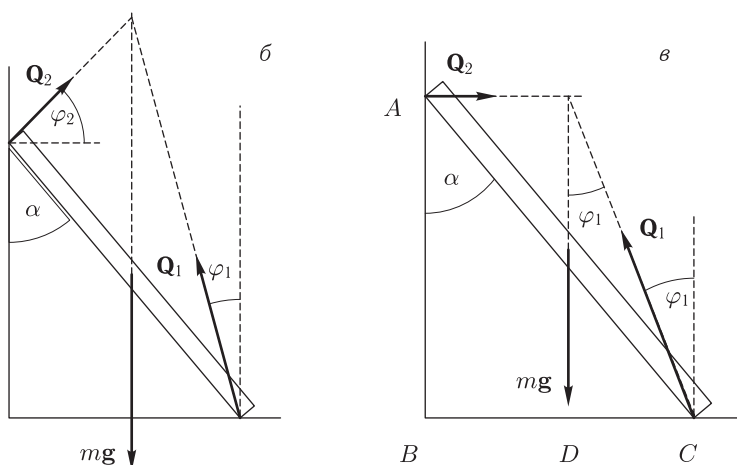


Рис. 2.24, б, в.

Подставляя соотношения (2.4.8) и (2.4.9) в (2.4.6), получаем тангенс угла наклона:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\mu_1}{1 - \mu_1\mu_2}. \quad (2.4.10)$$

Отметим, что при $\mu_1 = 0$, то есть при отсутствии трения о пол, лестница не может находиться в равновесии при $\alpha \neq 0$. Но трение о стену может отсутствовать, однако при этом максимальный угол наклона (при том же μ_1) будет меньше, чем при наличии трения о стену.

Доказать справедливость равенств (2.4.7) в случае, когда угол α имеет наибольшее возможное значение, можно иначе. Силы $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{N}_i$ можно рассматривать как составляющие полных сил реакции опор $\mathbf{Q}_i$, как это показано на рисунке. В этом случае на лестницу действуют только три силы — $m\mathbf{g}$, $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$.

Линии их действия в равновесии должны пересекаться в одной точке, которая, очевидно, лежит на вертикали, вдоль которой действует сила тяжести $m\mathbf{g}$. Непосредственно из этого рисунка видно, что угол α будет тем больше, чем больше значения углов φ_1 и φ_2 . Действительно, если увеличить угол α , то вертикаль, вдоль которой действует сила тяжести $m\mathbf{g}$ сдвинется вправо, что приведет к увеличению углов φ_1 и φ_2 . Но максимальные значения φ_1 и φ_2 достигаются тогда, когда выполнены соотношения (2.4.8), причем: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \mu_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \mu_2$.

Рисунок 2.24, б позволяет сразу увидеть, что в отсутствие трения о пол равновесие лестницы невозможно. В этом случае сила $\mathbf{Q}_1$ вертикальна (и совпадает с $\mathbf{N}_1$) и, следовательно, не пересекается с линией, вдоль которой действует $m\mathbf{g}$. Напротив, в отсутствие трения о стену равновесие возможно. В этом случае сила $\mathbf{Q}_2$ направлена

перпендикулярно стене, и все три силы могут пересечься в одной точке, как показано на следующем рис. 2.24, в.

Сразу видно, что максимальный угол α при этом можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2DC}{AB} = 2 \operatorname{tg} \varphi_1 = 2\mu_1, \quad (2.4.11)$$

что совпадает с выражением (2.4.10) при $\mu_2 = 0$, когда $\mathbf{Q}_2$ перпендикулярна стене.

Некоторые задачи статики можно решить, используя прием нахождения геометрических образов векторных уравнений.

Задача 2.25. Груз массой m висит на подвесе, собранном из невесомых нерастяжимых нитей, как показано на рис. 2.25, а, причем отмеченные дужками углы одинаковы. С какой силой $\mathbf{F}$ следует тянуть нить в точке O , чтобы система находилась в равновесии и модуль F был наименьшим?

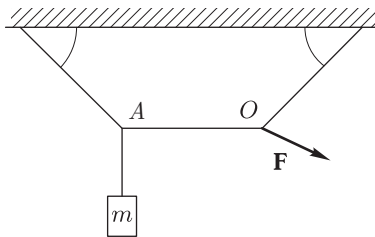


Рис. 2.25, а.

Рассмотрим условия равновесия в точках A и O . В точке A равна нулю векторная сумма сил натяжения горизонтальной, наклонной и вертикальной нитей, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, причем последняя равна силе тяжести груза $m\mathbf{g}$.

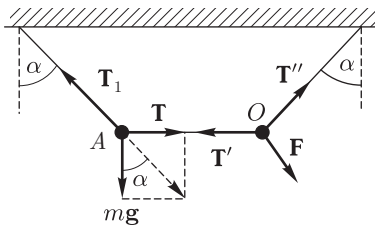


Рис. 2.25, б.

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}_1 + m\mathbf{g} = 0. \quad (2.4.12)$$

Из треугольника сил, соответствующего (2.4.12), сразу следует, что

$$T = mg \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.4.13)$$

В точке O также действуют три силы $\mathbf{T}' = -\mathbf{T}$, $\mathbf{T}''$ и искомая сила $\mathbf{F}$. Их векторная сумма также равна нулю:

$$\mathbf{T}' + \mathbf{T}'' + \mathbf{F} = 0. \quad (2.4.14)$$

Сила $\mathbf{T}'$ известна, и по модулю, равному T , и по направлению. Сила $\mathbf{T}''$ направлена вдоль второй наклонной нити и образует угол α с вертикалью. Поэтому треугольник сил, соответствующий равенству (2.4.14), имеет вид, показанный на рис. 2.25, в.

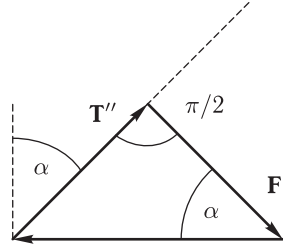


Рис. 2.25, в.

Максимальная по модулю сила $\mathbf{F}$ при этом направлена перпендикулярно наклонной нити, причем

$$F = T \cos \alpha. \quad (2.4.15)$$

Подставляя сюда значение T из (2.4.13), получаем:

$$F = mg \sin \alpha. \quad (2.4.16)$$

Полученный ответ удовлетворяет очевидному предельному случаю $\alpha = 0$, когда «наклонная» нить вертикальна, и прилагать силу в точке O не нужно.

Задача 2.26. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга с радиусом R , в котором вырезано круглое отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Определите положение центра масс пластинки.

Предположим, что маленький круг еще не вырезан, а только нарисован на большем круге, как показано на рисунке. Тогда сила тяжести, действующая на весь большой круг без выреза, приложена в его центре O , а ее модуль равен $\pi R^2 d \rho g$, где R — радиус круга, d — его толщина, ρ — плотность материала пластинки. Эта сила может рассматриваться как равнодействующая сил тяжести, действующих на малый круг и на пластинку

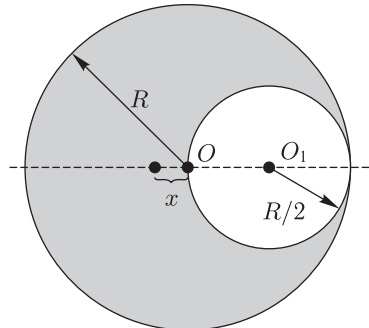


Рис. 2.26.

с вырезом. Сила тяжести, действующая на малый круг, приложена в его центре O_1 и равна по модулю $\pi(R/2)^2 d\rho g$. Сила тяжести, действующая на пластинку с вырезом, по модулю равна разности:

$$\pi R^2 d\rho g - \pi(R/2)^2 d\rho g = \frac{3}{4}\pi R^2 d\rho g.$$

Точка ее приложения, как ясно из соображений симметрии, лежит на прямой, проходящей через центры обоих кругов, на некотором расстоянии x от центра большого круга. Если подпереть большой круг без выреза в его центре, то он будет в равновесии, так как сила реакции опоры уравнивает силу тяжести. Можно написать условие равновесия моментов сил тяжести, действующих на малый круг и оставшуюся часть большого круга:

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 d\rho g \frac{R}{2} = \frac{3}{4}\pi R^2 d\rho g x, \quad (2.4.17)$$

откуда

$$x = R/6.$$

Отметим, что в случае только одного выреза в большом круге ответ легко получить, не рассматривая условие равенства моментов, а используя правило сложения параллельных сил. Однако уже в случае двух вырезов, расположенных по одну или по разные стороны от центра большого круга, отмеченный выше способ становится предпочтительнее, так как позволяет найти положение центра масс пластины с вырезами, записав одно уравнение равновесия для моментов.

При решении задач на исследование устойчивости равновесия можно либо анализировать действующие силы при выведении системы из равновесия, либо выяснять вопрос о наличии у потенциальной энергии системы минимума или максимума в положении равновесия.

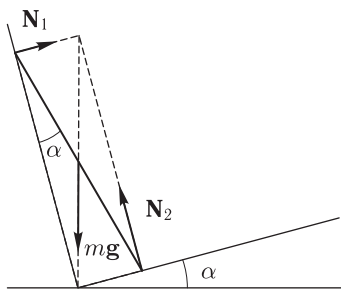


Рис. 2.27.

Задача 2.27. Однородная доска находится в равновесии в прямом двугранном угле с гладкими стенками. На рисунке показано сечение этого угла перпендикулярной ребру плоскостью, в которой лежит доска. Устойчиво ли равновесие доски?

Прежде всего необходимо выяснить, в каком положении относительно сторон угла находится доска, находящаяся в равновесии. В отсутствие трения на доску действуют три силы — сила тя-

жести mg , приложенная в центре доски, и две силы реакции опор N_1 и N_2 , направленные перпендикулярно граням угла. В равновесии

линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Так как двугранный угол является прямым, то вертикальная линия действия силы тяжести проходит через вершину прямого угла, как сразу ясно, глядя на рис. 2.27.

Действительно, четырехугольник, образованный сторонами прямого угла и направлениями сил реакции опор N_1 и N_2 , — это прямоугольник, одна из диагоналей которого вертикальна, а другая совпадает с положением доски. Легко видеть, что угол α , который образует доска с одной из граней угла, равен углу, образуемому другой гранью угла с горизонтальной линией.

Теперь ясно, как построением найти равновесное положение доски: нужно провести вертикаль через вершину угла и отложить на ней от вершины угла отрезок, равный длине доски. Из конца этого отрезка следует опустить перпендикуляры на стороны (грани) угла. Положение доски совпадает со второй диагональю получившегося прямоугольника.

Для исследования устойчивости равновесия доски переместим ее мысленно таким образом, чтобы концы доски скользили по граням угла. При этом центр масс доски, расположенный в точке пересечения диагоналей прямоугольника, будет перемещаться по дуге окружности, центр которой совпадает с вершиной угла, а радиус равен половине длины доски. В положении равновесия радиус, соединяющий вершину угла с центром масс доски, расположен вертикально, поэтому при смещении доски из положения равновесия ее потенциальная энергия уменьшится. Равновесие доски, следовательно, неустойчивое.

Задача 2.28. *В цилиндрический стакан наливают воду. При каком уровне воды в стакане центр масс стакана с водой занимает наинизшее положение? Центр масс пустого стакана расположен на его оси симметрии выше дна стакана.*

Когда в стакан налито немного воды, так что ее уровень оказывается ниже центра масс пустого стакана, центр масс всей системы (стакан + налитая вода), понижается по сравнению с положением центра масс пустого стакана. Если добавить еще немного воды, центр масс системы снова опустится. Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень воды в стакане не сравняется с положением центра масс частично наполненного стакана. После этого при дальнейшем добавлении воды центр масс системы начнет постепенно повышаться. Таким образом, центр масс стакана с водой занимает наинизшее положение, когда уровень воды в стакане совпадает с положением центра масс стакана с налитой водой.

Задача 2.29. *Однородная палочка массой m удерживается в положении равновесия нитью ОС, как показано на рисунке. Палочка наклонена к горизонтальной плоскости под углом α , а нить — под*

углом β . Концы палочки могут скользить без трения в вертикальной плоскости по горизонтальной поверхности и стене. Определите натяжение нити T и условие, при котором возможно равновесие.

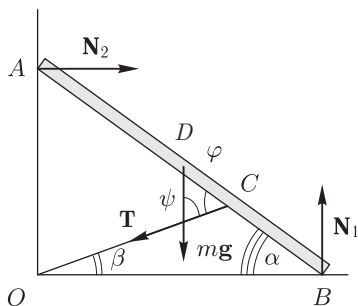


Рис. 2.29.

На рисунке показаны углы, значения которых легко определяются из геометрических соображений:

$$\varphi = \alpha + \beta,$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Обозначим через L длину палочки, а через l — длину отрезка DC , соединяющего точки приложения сил тяжести mg и натяжения нити T . Запишем уравнение равновесия всех внешних сил,

$$N_2 - T \cos \beta = 0, \quad N_1 - mg - T \sin \beta = 0, \quad (2.4.18)$$

и уравнение равновесия моментов сил относительно точки D :

$$N_1 \frac{L}{2} \cos \alpha - N_2 \frac{L}{2} \sin \alpha - T l \sin (\alpha + \beta) = 0,$$

которое при учете (2.4.18) примет вид

$$(mg + T \sin \beta) \frac{L}{2} \cos \alpha - T \frac{L}{2} \sin \alpha \cos \beta - T l \sin (\alpha + \beta) = 0. \quad (2.4.19)$$

Для нахождения значения T из уравнения (2.4.19) необходимо из геометрических соображений найти величину l . Это можно сделать следующим образом. Из подобия треугольников AOC и DEC следует равенство

$$\frac{DE}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{L/2 + l}{l}. \quad (2.4.20)$$

Величину отрезка DE можно найти из треугольника DEC с помощью теоремы синусов, учитывая, что $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta$:

$$\frac{DE}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{l}{\cos \beta}.$$

Выражая отсюда DE , подставляя его в (2.4.20) и учитывая, что

$$\sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta),$$

найдем:

$$l = \frac{L \sin (\alpha - \beta)}{2 \sin (\alpha + \beta)}.$$

Подставляя это значение l в уравнение (2.4.19), после простых преобразований получим:

$$T = \frac{mg \cos \alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)}. \quad (2.4.21)$$

Выражение (2.4.21) позволяет сформулировать условие, при котором возможно равновесие палочки. Все входящие в уравнение (2.4.19) величины, включая T , положительны. Поэтому физический смысл имеет только положительное значение T , даваемое формулой (2.4.21). Это означает, что $\alpha > \beta$. Итак, равновесие возможно, если точка C лежит ниже точки D .

Задача 2.30. Цепочка массой m подвешена за концы, которые находятся на одном горизонтальном уровне. Натяжение цепочки в ее нижней точке равно T . Определите натяжение цепочки в точках подвеса и угол, образуемый цепочкой с вертикалью в точке подвеса.

Самое трудное при решении этой задачи — это осознать, что условия равновесия справедливы не только для твердых тел, но и для объектов, не имеющих собственной постоянной формы. В частности, условия равновесия можно записать для любого выделенного элемента цепочки. Рассмотрим одну, например, правую половину симметрично висящей цепочки. На нее действуют три внешние силы: сила тяжести $mg/2$, приложенная в центре масс рассматриваемой половины цепочки при принятой ею форме, сила натяжения $\mathbf{T}$ со стороны левой половины цепочки, которая направлена горизонтально, как это ясно из соображений симметрии, и сила $\mathbf{T}_1$ со стороны подвеса, как показано на рис. 2.30, а.

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}_1 + \frac{1}{2}mg = 0. \quad (2.4.22)$$

Треугольник, соответствующий уравнению (2.4.22), прямоугольный, поэтому немедленно получаем:

$$T_1 = \sqrt{T^2 + \left(\frac{1}{2}mg\right)^2}.$$

В равновесии линии действия сил $mg/2$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_1$ пересекаются в одной точке, что позволяет по заданной форме цепочки графически находить горизонтальную координату центра масс ее половины: проводим линии действия сил $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_1$, вертикальная линия действия силы тяжести проходит через точку пересечения линий действия сил $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_1$.

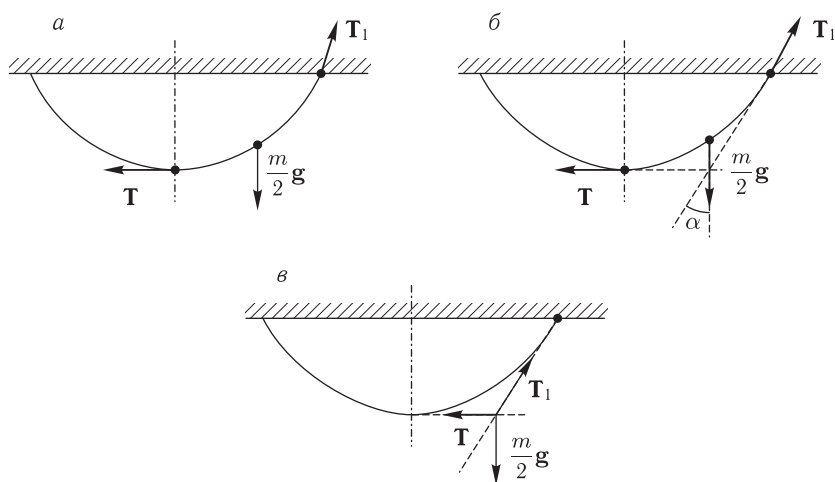


Рис. 2.30.

Угол, образуемый цепочкой с вертикалью в точке подвеса, также определяется с помощью треугольника сил:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2T}{mg}.$$

Задача 2.31. *Каким способом легче сдвинуть с места тяжелый автобус — прилагая силу к его корпусу или к верхней части туго накачанного колеса?*

Чтобы сдвинуть автобус с места, нужно привести в движение его колеса, то есть «провернуть» их около точек A контакта с дорогой.

Когда сила F прикладывается к корпусу автобуса, момент силы, заставляющий колеса сдвигаться с места, определяется радиусом колеса, как ясно из приведенного рис. 2.31: на колеса эта сила передается на уровне их осей, где колеса соединяются с корпусом автобуса.

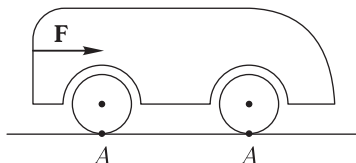


Рис. 2.31.

Если сила прикладывается к верхней части колеса, то ее момент оказывается вдвое больше, так как в этом случае плечо, определяющее момент силы, равно диаметру колеса.

При заблокированных (невращающихся) колесах, когда в точках контакта с дорогой происходит трение скольжения, точка приложения толкающей силы $\mathbf{F}$ не имеет значения.

2.5. Механика жидкостей и газов

Одним из наиболее эффективных подходов к решению задач гидростатики, позволяющим избежать громоздких вычислений, а иногда позволяющим сразу сформулировать ответ, по существу не производя никаких математических выкладок, является мысленное помещение рассматриваемой системы на чашку весов, которые при отсутствии движения отдельных частей системы всегда дают показание, пропорциональное полной массе находящегося на чашке весов объекта.

Задача 2.32. Перевернутая тяжелая коническая воронка поставлена на ровную горизонтальную поверхность, покрытую резиновым ковриком, чтобы обеспечить плотный контакт воронки с поверхностью, на которой она стоит. Через узкое отверстие воронки, оканчивающейся тонкой трубкой, внутрь медленно наливают воду, так чтобы она стекала по стенкам воронки. Когда уровень воды в трубке становится равным h , вода начинает вытекать из-под воронки. Какова масса воронки m , если площадь сечения ее широкого отверстия равна S и высота равна H ?

Нетрудно сообразить, что вода начинает вытекать из-под воронки, когда вертикальная составляющая сил давления воды на боковую поверхность воронки уравнивает действующую на воронку силу тяжести: воронка при этом приподнимается, поскольку перестает давить на поверхность, и вода начинает вытекать. Из соображений симметрии ясно, что эта вертикальная составляющая действует вдоль оси воронки, но ее непосредственный расчет требует применения интегрирования.

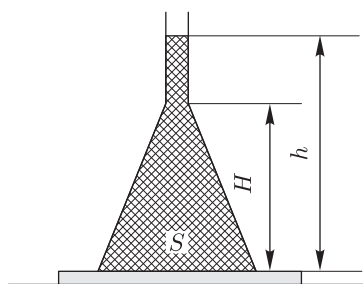


Рис. 2.32.

Однако при (мысленном) помещении всей системы на весы показания весов определяются суммой масс воронки и налитой в нее через трубку воды. Когда вода начинает вытекать из-под воронки, воронка перестает давить на подставку, и показания весов, равное $(M + m)g$, где M — масса налитой воды, определяется силой давления столба воды высотой h и площадью S на подставку:

$$mg + \rho g V = \rho h S g. \quad (2.5.1)$$

Здесь ρ — плотность воды, а V — объем воды в воронке и трубке. При тонкой трубке можно пренебречь объемом воды в трубке, в этом случае:

$$V = \frac{1}{3}HS.$$

А из уравнения (2.5.1) для массы воронки получаем:

$$m = \rho S \left(h - \frac{H}{3} \right). \quad (2.5.2)$$

Из соотношения (2.5.2) следует, что для возможности наблюдения описанного эффекта, когда вода начинает вытекать после заполнения водой всей воронки, воронка должна быть достаточно тяжелой: нетрудно убедиться, что масса воронки должна вдвое превышать массу воды в воронке. Действительно, масса воды в воронке равна $M = HS\rho/3$. Если $m < 2M$, то при наливании воды через трубку воронка начнет отрываться от подставки еще до того, как вода заполнит всю воронку: из соотношения (2.5.2) следует, что при $m < 2M$, $h < H$.

Описанный подход позволяет сразу отвечать на вопросы следующего типа.

Задача 2.33. Из лодки в бассейн выбрасывают деревянный брусок. Как изменится уровень воды в бассейне, если брусок: а) падает в воду; б) падает на берег бассейна?

Помещаем бассейн вместе с берегами на весы. Тогда в случае а) показания весов определяются исключительно силой давления воды на дно. Поскольку брусок плавает в воде и сам на дно не давит, то уровень воды в бассейне останется без изменения. В случае б) брусок оказывается на берегу и сам давит на чашку весов. В результате сила давления воды должна уменьшиться на такую же величину. Значит, уровень воды в бассейне понижается.

Приведем еще один пример, в котором описанный подход позволяет глубже понять правильную четкую формулировку закона Архимеда, в которой вместо «объема вытесненной жидкости» фигурирует «объем жидкости, равный объему погруженной в жидкость части тела». Эти величины, как будет показано, совпадают только тогда, когда уровень воды в сосуде не меняется при погружении тела.

Задача 2.34. В сосуд с вертикальными стенками и площадью дна S_0 налита вода, в которую опускают деревянный цилиндр массой m с площадью поперечного сечения S и высотой H . На сколько изменится уровень воды в сосуде?

Задача легко решается с помощью описанного подхода. Уравновесив сосуд с водой и брусок на чашке весов, опустим брусок в воду. Равновесие весов при этом не нарушится. Но после помещения бруска

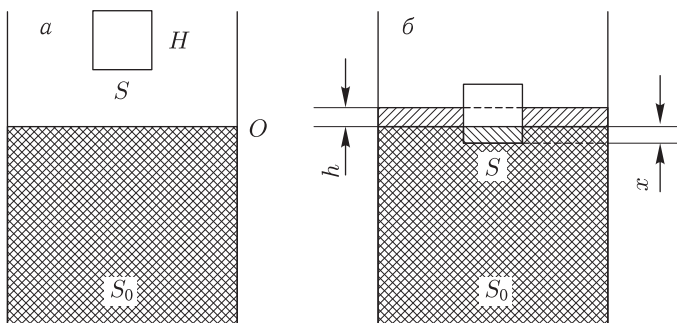


Рис. 2.34.

в воду он непосредственно на чашку весов не давит, а необходимая для равновесия весов сила mg возникает за счет увеличения уровня воды в сосуде на величину h . Поэтому имеем:

$$mg = \rho gh S_0,$$

откуда

$$h = \frac{m}{\rho S_0}. \quad (2.5.3)$$

Ответ не зависит от размеров и формы бруска.

При решении этой задачи с помощью закона Архимеда приходится учитывать различие между объемом вытесненной жидкости (т. е. жидкости, выдавленной бруском со своего места) и объемом погруженной части бруска. Первый объем показан штриховкой на рис. 2.22, б и равен Sx , где x — глубина, на которой будет находиться нижнее основание бруска, отсчитанная от первоначального уровня воды в сосуде, обозначенного буквой O . Вследствие несжимаемости жидкости вытесненный объем, занимающий площадь $(S_0 - S)$ и возвышающийся на высоту h над первоначальным уровнем воды в сосуде, также равен Sx . Поэтому

$$Sx = (S_0 - S)h,$$

откуда для объема погруженной части тела, определяющего величину выталкивающей силы, имеем

$$S(x + h) = S_0 h.$$

Теперь, приравнивая выталкивающую силу $\rho S_0 h g$ силе тяжести бруска mg , получаем прежний результат (2.5.3). Приведенное рассмотрение четко демонстрирует различие объема погруженной части тела и объема вытесненной жидкости. Легко видеть, что в рассматриваемой системе эти величины будут совпадать, если в стенке сосуда на первоначальном уровне жидкости проделать отверстие, через которое будет

вытекать вода при погружении в нее бруска. При этом, естественно, уровень воды в сосуде меняться не будет.

Обратим внимание на то, что при решении задачи с помощью закона Архимеда приходится использовать информацию о форме и размерах бруска, от которых, вообще говоря, зависит то, в каком положении он будет плавать. Эта информация не нужна при решении задачи с помощью описанного выше подхода. Однако в ряде задач именно использование закона Архимеда позволяет провести рассмотрение явления наиболее компактным и элегантным образом.

Задача 2.35. В дне сосуда имеется круглое отверстие, в которое вставлена труба радиусом r . На трубу положен цилиндрический брусок массой m , радиусом $R > r$ и толщиной d . До какой высоты над верхней гранью бруска следует налить воду в сосуд, чтобы он не всплывал?

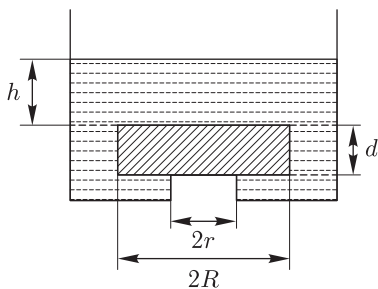


Рис. 2.35.

Очевидно, что плотность ρ_0 материала бруска меньше плотности воды ρ , в противном случае брусок вообще всплывать не будет. Хотя заранее ясно, что наиболее простой путь решения задачи связан с использованием закона Архимеда, полезно рассмотреть силы давления на верхнюю и нижнюю грани бруска, поскольку формально брусок не «погружен» в воду полностью.

Если вода налита до высоты h над верхней гранью бруска, то брусок не будет всплывать, если сумма силы давления воды на верхнюю грань и силы тяжести бруска будет не меньше силы давления воды на нижнюю грань:

$$mg + \pi R^2 \rho gh \geq \pi (R^2 - r^2) \rho g (d + h). \quad (2.5.4)$$

Перегруппировав слагаемые и приведя подобные члены, перепишем это неравенство следующим образом:

$$mg + \pi r^2 \rho gh \geq \pi (R^2 - r^2) \rho gd. \quad (2.5.5)$$

Теперь видно, что соотношение (2.5.5) соответствует закону Архимеда: слева стоит сумма силы тяжести и силы давления воды на ту часть верхней грани бруска, для которой отсутствует соответствующая сила давления на нижнюю грань, так как там нет воды; справа стоит выталкивающая сила, действующая на погруженную в воду часть бруска. Если сила тяжести mg больше выталкивающей силы, то при любом уровне воды брусок не будет всплывать. В противном случае,

когда $m < \pi (R^2 - r^2) \rho d$, брусок не будет всплывать при выполнении следующего условия:

$$h \geq \frac{\pi (R^2 - r^2) \rho d - m}{\pi r^2 \rho}. \quad (2.5.6)$$

Главное преимущество, которым обладает решение на основе закона Архимеда, заключается в том, что оно может использоваться и в тех случаях, когда невозможно составить уравнение типа (2.5.4), оставаясь в рамках элементарной математики.

Задача 2.36. В том же сосуде, что и в предыдущей задаче, отверстие трубы закрыто конической пробкой с радиусом основания R и высотой H . До какого уровня нужно налить воду над основанием пробки, чтобы она не всплывала?

Видно, что подсчитать силу давления воды на боковую поверхность конической пробки достаточно сложно. Однако эта необходимость пропадает, если воспользоваться законом Архимеда. Выталкивающая сила, действующая на погруженную в воду часть конуса, определяется объемом V этой части. Этот объем равен разности между объемом всего конуса и объемом той его части, ниже которой нет воды: эта часть состоит из конуса с основанием r и высотой $H_1 = Hr/R$ и цилиндра с радиусом основания r и высотой $H - H_1 = H(1 - r/R)$:

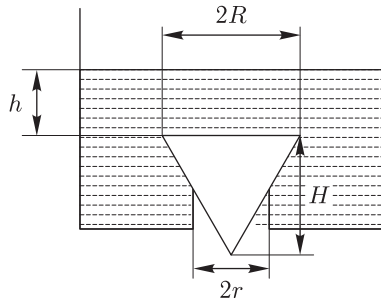


Рис. 2.36.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 H \frac{r}{R} - \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (2.5.7)$$

Теперь запишем аналог уравнения (2.5.5) предыдущей задачи:

$$mg + \pi r^2 \rho gh \geq \rho V g, \quad (2.5.8)$$

где V дается выражением (2.5.7). При $m > \rho V$ коническая пробка не всплывет при любом уровне воды. В противном случае для необходимой высоты h с помощью (2.5.7) и (2.5.8) получаем

$$h \geq \frac{\rho V - m}{\pi r^2 \rho} = \frac{\frac{1}{3}\pi \rho H \left(R^2 - 3r^2 + \frac{2r^3}{R}\right) - m}{\pi r^2 \rho}.$$

Задача 2.37. Сплошное однородное тело объемом V , плотность материала которого равна ρ , плавает на границе раздела двух

несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Какая часть α объема тела будет находиться в более тяжелой жидкости?

Очевидно, что более тяжелая жидкость находится снизу. В эту жидкость при равновесии погружен объем тела, равный αV , а в более легкую — объем $(1 - \alpha)V$.

Условие равновесия тела имеет вид

$$\rho g V = \alpha V \rho_1 g + (1 - \alpha) V \rho_2 g, \quad (2.5.9)$$

где ρ_1 — плотность более тяжелой жидкости. С помощью (2.5.9) находим

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (2.5.10)$$

Отметим, что α всегда положительно, поскольку $\rho > \rho_2$. В противном случае тело плавало бы целиком в более легкой верхней жидкости. Кроме того, $\rho < \rho_1$, поскольку в противном случае тело тонуло бы в одной тяжелой жидкости. При выполнении обоих этих условий значение α лежит в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$, как и должно быть в соответствии с физическим смыслом этой величины.

Задача 2.38. Оцените массу воздушной атмосферы, окружающей Земной шар.

Элементарная оценка массы земной атмосферы выглядит следующим образом. Если давление атмосферы у поверхности Земли равно p , то модуль силы, действующей на всю земную поверхность (если считать ее плоской) равен $p \cdot 4\pi R^2$, где R — радиус Земли. Эта величина равна силе тяжести, действующей на атмосферу. Поэтому

$$mg = p \cdot 4\pi R^2,$$

откуда

$$m = \frac{4\pi p R^2}{g}. \quad (2.5.11)$$

Рассуждения можно сделать более аккуратными, если рассмотреть «вертикальный» столб атмосферы с такой площадью основания, которую можно считать плоской, а затем просуммировать массы всех таких столбов в атмосфере.

Однако правильный результат должен получиться и при других способах рассуждений при использовании других законов физики. В частности, можно, например, считать, что вся земная атмосфера «плавает» в тонком поверхностном слое. Тогда действующая на атмосферу выталкивающая сила, с одной стороны, равна по модулю силе тяжести атмосферы, а с другой стороны, вследствие закона Паскаля, может быть представлена как произведение $p 4\pi R^2$. В результате снова приходим к формуле (2.5.11).

Задача 2.39. Тело массой m и объемом V находится в воде на глубине h . Какую работу необходимо совершить, чтобы поднять его на поверхность воды? Считать, что размеры тела малы по сравнению с h .

Очевидно, что средняя плотность тела больше плотности воды ρ_0 , ибо в противном случае тело само всплыло бы на поверхность. Чтобы поднимать тело вверх на поверхность, на него нужно действовать с силой $\mathbf{F}$, модуль которой равен разности модулей сил тяжести и выталкивающей силы:

$$F = mg - \rho_0 Vg. \quad (2.5.12)$$

Работа, совершаемая этой силой при медленном подъеме тела с глубины h на поверхность, равна

$$A = Fh = (m - \rho_0 V)gh. \quad (2.5.13)$$

Подъем необходимо совершать медленно, чтобы можно было пренебречь действием на тело всех других сил, кроме указанных трех.

Сравним совершаемую работу A с изменением потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли:

$$\Delta E = mgh. \quad (2.5.14)$$

Видно, что совершаемая при подъеме тела работа меньше увеличения потенциальной энергии тела на величину $\rho_0 Vgh$. Однако ясно, что именно на такую величину уменьшается потенциальная энергия воды при подъеме тела. Поэтому закон сохранения механической энергии системы оказывается справедливым: работа внешней силы равна изменению механической энергии системы «тело+вода», которая состоит только из потенциальной энергии при очень медленном подъеме. Мы снова приходим к формуле (2.5.13), но записывается теперь она из других соображений. В первоначальной трактовке в выражении для работы $A = Fh$ подставлялась сила F из выражения (2.5.12). В энергетической трактовке работа приравнивается известной величине изменения механической энергии системы, поэтому теперь сила F может быть определена именно из соотношения (2.5.13).

При решении задач о движении идеальной жидкости следует учитывать ее несжимаемость, поэтому при стационарном ламинарном потоке нужно использовать уравнение непрерывности и учитывать закон сохранения энергии, выражаемый уравнением Бернулли. Во многих задачах, однако, удобнее непосредственно составлять уравнение, соответствующее условию баланса энергии.

Задача 2.40. Насос должен подавать каждую секунду объем V воды на высоту h по трубе с постоянным сечением S . Какова должна быть мощность насоса, если плотность воды равна ρ ?

Каждую секунду масса воды $m = \rho V$ поднимается на высоту h , следовательно приобретает потенциальную энергию, равную $mgh = \rho Vgh$. При этом вода движется с определенной скоростью, равной V/S , а кинетическая энергия воды, проходящей каждую секунду через сечение S , есть

$$mv^2/2 = \rho V \cdot V^2/2S^2.$$

Отсюда следует, что мощность P должна удовлетворять следующему условию:

$$P \geq \rho Vgh + \frac{\rho V^3}{2S^2} = \rho V \left(gh + \frac{V^2}{2S^2} \right). \quad (2.5.15)$$

Знак равенства возможен, если коэффициент полезного действия насоса равен 100 %. При проверке ответа на размерность следует учитывать, что размерность величины V — объемного расхода воды в единицу времени, есть L^3T^{-1} .

Задача 2.41. На поршень шприца площадью S действует сила F . С какой скоростью вытекает струя жидкости плотностью ρ , если шприц расположен горизонтально, и площадь отверстия иглы равна S_1 ?

Если за время Δt поршень перемещается на расстояние $\Delta l = v\Delta t$, то действующая сила F совершает работу

$$\Delta A = F\Delta l = Fv\Delta t. \quad (2.5.16)$$

За это время из отверстия иглы вытекает масса жидкости, равная

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t,$$

где v_1 — скорость струи. Кинетическая энергия этой массы жидкости равна

$$E_k = \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \frac{\rho S_1 v_1^3 \Delta t}{2}. \quad (2.5.17)$$

Изменение кинетической энергии всей жидкости за Δt можно найти, вычитая из (2.5.17) кинетическую энергию такой же массы Δm жидкости, движущейся впереди поршня:

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m}{2} (v_1^2 - v^2) = \frac{\rho S_1 v_1}{2} (v_1^2 - v^2). \quad (2.5.18)$$

По закону сохранения энергии $\Delta A = \Delta E_k$, так как в горизонтально расположенном шприце потенциальная энергия жидкости не изменяется. Поэтому, приравнявая выражения (2.5.16) и (2.5.18), получаем

$$Fv = \frac{\rho S_1 v_1}{2} (v_1^2 - v^2). \quad (2.5.19)$$

Скорость v движения поршня в шприце можно связать со скоростью v_1 истечения струи с помощью уравнения непрерывности:

$$Sv = S_1v_1. \quad (2.5.20)$$

Подставляя v из (2.5.20) в (2.5.19), находим скорость вытекающей струи:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2FS}{\rho(S^2 - S_1^2)}}. \quad (2.5.21)$$

Обычно $S_1 \ll S$, поэтому с большой точностью справедливо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S}}. \quad (2.5.22)$$

Разумеется, можно сразу получить выражение (2.5.22), если учесть, что из уравнения непрерывности (2.5.20) при $S_1 \ll S$ следует, что $v \ll v_1$. Действительно, работа внешней силы F пропорциональна первой степени v , а кинетическая энергия жидкости, движущейся в шприце впереди поршня, пропорциональна v^2 . Поэтому вместо (2.5.19) можно сразу написать, что

$$Fv = \frac{\rho S_1 v_1}{2} v_1^2.$$

Подставляя сюда скорость v из (2.5.20), получаем выражение (2.5.22). Здесь следует обратить внимание на возможность пренебрежения величинами более высокого порядка малости по сравнению с удерживаемыми. Отметим, что в указанных приближениях ($S_1 \ll S$, $v \ll v_1$) соотношение (2.5.22) может быть немедленно получено с помощью уравнения Бернулли.

Задача 2.42. В боковой стенке широкого сосуда с водой имеется закрытое пробкой отверстие. Найдите модуль реактивной силы, которая будет сдвигать сосуд с места, если вынуть пробку.

Обозначим площадь сечения отверстия через S , а высоту уровня воды в сосуде над отверстием через h . Изложим два способа возможных рассуждений — «статический» и «динамический». В рамках гидростатики сила давления воды на пробку равна

$$F = pS = \rho ghS. \quad (2.5.23)$$

При удалении пробки на противоположную стенку сосуда, казалось бы, должна действовать такая же неуравновешенная сила. Однако, вследствие вытекания жидкости, высота ее уровня будет меняться, что необходимо учитывать при нахождении силы.

В рамках динамического подхода действующая сила равна импульсу, уносимому вытекающей струей воды в единицу времени. Скорость истечения воды определяется с помощью закона сохранения энергии:

$$\rho \Delta V g h = \frac{1}{2} \rho \Delta V v^2. \quad (2.5.24)$$

Слева стоит потенциальная энергия массы воды $\rho \Delta V$, находящейся на высоте h , которая исчезнет вследствие опускания уровня воды при вытекании такой же массы воды через отверстие, уносящей кинетическую энергию, стоящую в правой части (2.5.24). Отсюда находим, что $v^2 = 2gh$.

Импульс, уносимый вытекающей водой в единицу времени, равен произведению вытекающей в единицу времени массы $\Delta m / \Delta t = \rho S v$ на скорость v . Поэтому для реактивной силы получаем:

$$F = 2\rho g h S. \quad (2.5.25)$$

Как видим, результаты (2.5.23) и (2.5.25) получились различными. Таким образом, предпочтение следует отдать результату динамического подхода, особенно, когда в отсутствие трения сосуд действительно приходит в движение. Однако скорость вытекания струи в действительности зависит от формы струи. А ее форма зависит от конструкции отверстия. Поэтому, не зная конструкции отверстия, невозможно утверждать о справедливости именно такого выражения (2.5.23) для расчета силы.

2.6. Механические колебания и волны

Некоторые задачи о движении частиц в условиях колеблющихся систем по существу представляют собой кинематические задачи, осложненные только специфическими начальными условиями.

Задача 2.43. *Мелкий песок насыпан на верхнюю ветвь расположенного горизонтально камертона, который приводят посредством смычка в колебания с частотой $\omega = 10^4$ Гц. Какова амплитуда колебаний в том месте ветви камертона, где песчинка подскакивает на высоту $H = 10^{-3}$ м по отношению к положению при покоящемся камертоне?*

Песчинки отделяются от поверхности камертона, на которой они лежат, когда их скорость (и скорость поверхности) направлена вертикально вверх, а ускорение поверхности направлено вниз и по модулю превосходит g . Действительно, в этом случае ускорение песчинок тоже направлено вниз, а по модулю оно не может превосходить g , если только песчинки не прилипли к поверхности. После отделения от поверхности камертона песчинки движутся так же, как тело, брошенное

вертикально вверх, и возникает обычная кинематическая задача. Проблема, таким образом, сводится к определению начальных условий: где находится поверхность камертона в этот момент и какова ее скорость.

Будем отсчитывать время от того момента, когда поверхность камертона движется вверх и проходит положение равновесия. Уравнение движения гармонических колебаний камертона в этом случае записывается в виде

$$x = A \sin \omega t, \quad (2.6.1)$$

где ось x направлена вертикально вверх, а ее нуль приходится на положение равновесия камертона.

При этом скорость и ускорение даются формулами:

$$v = \dot{x} = A\omega \cos \omega t, \quad a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (2.6.2)$$

Теперь необходимо определить момент времени t_0 , в который скорость и ускорение имеют указанные значения: из условия $|a| = g$ получаем:

$$\sin \omega t_0 = \frac{g}{A\omega^2}. \quad (2.6.3)$$

С учетом тригонометрического тождества

$$\cos^2 \omega t_0 = 1 - \sin^2 \omega t_0 = 1 - \frac{g^2}{A^2 \omega^4},$$

получаем для квадрата скорости v_0 в момент времени t_0 следующее:

$$v_0^2 = A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t_0 = A^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{A^2 \omega^4} \right). \quad (2.6.4)$$

Теперь остается составить уравнение для заданной в условии задачи высоты H , складывающейся из высоты $x(t_0)$ над положением равновесия, с которой песчинки летят вверх со скоростью v_0 , и максимальной высоты подъема песчинок над этим уровнем:

$$H = x(t_0) + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2.6.5)$$

С учетом соотношений (2.6.1), (2.6.3) и (2.6.4) это равенство приводится к виду

$$H = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{A^2 \omega^2}{2g}. \quad (2.6.6)$$

Отсюда для амплитуды A получаем:

$$A = \sqrt{\frac{2gH}{\omega^2} - \frac{g^2}{\omega^4}}.$$

Подставляя сюда приведенные в условии задачи значения величин, находим, что вторым слагаемым под знаком квадратного корня можно пренебречь по сравнению с первым, и для амплитуды получаем

$$A = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Решение задач на расчет периода (или частоты) колебаний механических систем сводится к выяснению того факта, что дополнительная сила, возникающая при выведении системы из положения равновесия, пропорциональна смещению x из равновесного положения и направлена к положению равновесия. В этом случае колебания будут гармоническими, а квадрат частоты колебаний равен: $\omega^2 = k/m$, где k — коэффициент пропорциональности в выражении для силы $F_x = -kx$, а m — масса колеблющегося тела.

Задача 2.44. К концу деревянного цилиндрического карандаша с площадью поперечного сечения S приделан грузик, в результате чего карандаш плавает в воде в вертикальном положении, высовываясь из нее практически наполовину. Каков период колебаний карандаша, если его утопить немного глубже положения равновесия и отпустить?

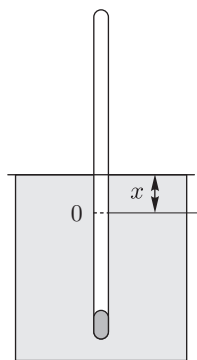


Рис. 2.44.

В положении равновесия действующая на карандаш сила тяжести уравнивается выталкивающей силой Архимеда. При дополнительном погружении карандаша на расстояние x от уровня положения равновесия (отмеченного нулем на рис. 2.44) возникает дополнительная выталкивающая сила F , направленная вертикально вверх, модуль которой равен

$$F = \rho S x g,$$

где ρ — плотность воды.

Сила пропорциональна смещению x и направлена в сторону, противоположную смещению. Легко убедиться, что при вытаскивании карандаша вверх от положения равновесия также будет возникать сила направленная вниз и пропорциональная смещению x . Эта сила возникает как равнодействующая силы тяжести и не полностью уравнивающей ее силы Архимеда. Поэтому карандаш будет совершать колебания, которые в рассмотренной модели будут гармоническими. Квадрат частоты колебаний равен

$$\omega^2 = \frac{\rho S g}{m},$$

где m — масса карандаша. Соответственно, периода T равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S g}}.$$

Отметим, что сразу виден ограниченный характер использованной физической модели явления. В самом деле, не учтена сила сопротивления движению, обусловленная вязкостью воды. Кроме того, не учитывается, что при колебаниях карандаша приходит в движение и примыкающая к нему жидкость. Обе эти причины приводят к уменьшению частоты колебаний.

Задача 2.45. *Используйте соображения размерности для определения частоты колебаний груза массой m на гладкой горизонтальной поверхности, прикрепленного к невесомой пружине жесткостью k , как показано на рисунке.*

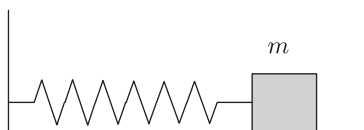


Рис. 2.45.

По условию массой пружины можно пренебречь, а тогда ее длина в недеформированном состоянии не может влиять на частоту колебаний. Остаются только два параметра, характеризующие колебательные свойства рассматриваемой системы. Это масса m и коэффициент жесткости k с размерностями $[m] = M$, $[k] = MT^{-2}$. Размерность коэффициента k устанавливается, например, из условия $F = kx$.

Видно, что в системе отсутствует безразмерный параметр и параметр с размерностью длины. Это означает, что потенциальная энергия, равная $kx^2/2$, может принимать любые положительные значения. Из параметров m и k единственным образом строится комбинация, имеющая размерность времени:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.6.7)$$

Поскольку частота ω связана с периодом колебаний T соотношением $\omega = 2\pi/T$, то соотношение (2.6.7) означает, что частота колебаний пропорциональна $\sqrt{k/m}$. Динамический расчет показывает, что возможный численный коэффициент пропорциональности равен единице и частота свободных колебаний в системе равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Задача 2.46. На пружине жесткостью k подвешена чашка массой M , на которую с высоты H над чашкой падает гиря массой m и прилипает к чашке. Определите частоту и амплитуду возникающих колебаний и положение равновесия чашки с гирей, около которого происходят колебания.

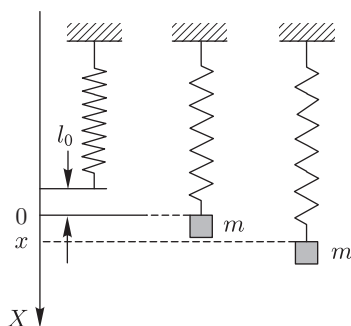


Рис. 2.46.

Частота колебаний груза на пружине определяется отношением коэффициента жесткости пружины к массе груза:

$$\omega^2 = \frac{k}{m + M}.$$

Положение равновесия, около которого происходят колебания (и около которого остановится чашка с гирей после их затухания), определяется соотношением:

$$(M + m)g = k(l_0 + l). \quad (2.6.8)$$

где l_0 — растяжение пружины под действием силы тяжести чашки Mg , а l — дополнительное статическое растяжение под действием силы тяжести гири. Очевидно, что

$$l_0 = \frac{Mg}{k}, \quad l = \frac{mg}{k}. \quad (2.6.9)$$

Гиря падает на неподвижно висящую чашку со скоростью

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Вследствие закона сохранения импульса скорость чашки v с прилипшей к ней гирей в начальный момент определяется соотношением

$$mv_0 = (M + m)v,$$

откуда

$$v = \frac{m}{M + m} \sqrt{2gH}. \quad (2.6.10)$$

С момента прилипания гири к чашке выполняется закон сохранения механической энергии. Система обладает двумя видами потенциальной энергии — энергией сжатой или растянутой пружины и энергией грузов в поле земного тяготения. Выберем нуль потенциальной энергии тяготения в точке, соответствующей положению равновесия чашки без гири на пружине. Тогда закон сохранения энергии для точки, где чашка с гирей останавливается при колебаниях, и отстоящей на расстояние L от этого положения, записывается в следующем виде:

$$\frac{kl_0^2}{2} + \frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{k(L+l_0)^2}{2} - (M+m)gL. \quad (2.6.11)$$

Подставляя в это выражение значение l_0 , даваемое первой из формул (2.6.9), и выражение для v из (2.6.10), получим после приведения подобных членов следующее квадратное уравнение для L :

$$L^2 - \frac{2mgL}{k} - \frac{2m^2gH}{k(M+m)} = 0, \quad (2.6.12)$$

корни которого равны

$$L = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gH}{k(M+m)}}. \quad (2.6.13)$$

Величина mg/k в соответствии со второй из формул (2.6.9) равна статическому растяжению l пружины под действием силы тяжести гири mg , считая от положения равновесия чашки на пружине. Видно, что колебания действительно происходят около положения равновесия чашки с гирей, определяемого соотношением (2.6.8). Амплитуда A колебаний равна входящему в соотношение (2.6.13) квадратному корню:

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gH}{k(M+m)}}.$$

Положительный знак перед квадратным корнем в (2.6.13) соответствует нижней точке остановки чашки с гирей при колебаниях, а отрицательный знак — верхней точке остановки. Соответствующее значение L оказывается отрицательным, поскольку при движении вверх при колебаниях чашка поднимается выше своего положения равновесия без гири. Действительно, в начальный момент колеблющееся тело движется к положению равновесия и обладает некоторой скоростью. На обратном пути в этой точке (принятой за начало отсчета) тело будет обладать такой же по модулю скоростью, а следовательно, продвинется дальше в область отрицательных значений координаты.

Соотношение (2.6.13) удовлетворяет предельному случаю, когда масса чашки M равна нулю. В этом случае пружина до падения гири

недеформирована, $l_0 = 0$, а закон сохранения записывается в более простом виде:

$$mgH = \frac{kL^2}{2} - mgL,$$

откуда получается значение L , следующее из (2.6.13) при $M = 0$.

Отметим, что уравнение закона сохранения энергии (2.6.11) имеет наиболее простой вид при указанном выборе начала отсчета потенциальной энергии в поле силы тяжести. Однако возможна еще более простая запись, если вообще исключить из рассмотрения потенциальную энергию в поле тяготения. Это можно сделать, поскольку сила тяжести просто смещает положение равновесия, не меня жесткости пружины. При этом в системе остается только одна упругая сила, пропорциональная смещению $(L - l)$ из нового положения равновесия; сила тяжести уже отсутствует. Отсутствует и связанная с силой тяжести потенциальная энергия. Уравнение закона сохранения энергии теперь принимает вид

$$\frac{kl^2}{2} + \frac{(m + M)v^2}{2} = \frac{k(L - l)^2}{2}, \quad (2.6.14)$$

что эквивалентно уравнению (2.6.11), так как приводит к тому же квадратному уравнению (2.6.12) для L .

Покажем справедливость сделанного утверждения относительно отсутствия потенциальной энергии силы тяжести.

Пусть потенциальная энергия системы при смещении груза из положения равновесия на расстояние x имеет вид

$$E_{\text{п}} = \frac{k(l_0 + x)^2}{2} - mgx + C.$$

Выберем произвольную постоянную C таким образом, чтобы равнялась нулю полная потенциальная энергия в положении равновесия груза:

$$\frac{kl_0^2}{2} + C = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{kl_0^2}{2}.$$

Теперь полная потенциальная энергия будет иметь вид

$$E_{\text{п}} = \frac{k(l_0 + x)^2}{2} - mgx - \frac{kl_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Задача 2.47. Считая, что причиной распространения крупномасштабных волн на поверхности воды в морях и океанах является земное притяжение, оцените их скорость, исходя из соображений размерностей.

Параметрами, определяющими рассматриваемое явление, является плотность жидкости ρ , ускорение свободного падения g , длина волны λ и глубина водоема h . Выпишем их размерности:

$$[\rho] = ML^{-3}, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\lambda] = L, \quad [h] = L.$$

Видно, что единственным независимым безразмерным параметром здесь является отношение $\gamma = \lambda/h$. В соответствии с π -теоремой (см. гл. 1, § 1.1) выражение для скорости распространения волн v с размерностью $[v] = LT^{-1}$ дается выражением

$$v = \sqrt{\lambda g} \cdot f(\gamma), \quad (2.6.15)$$

поскольку $\sqrt{\lambda g}$ является комбинацией с размерностью скорости.

Плотность воды ρ не входит в это выражение. На глубокой воде, когда $\lambda \ll h$, скорость распространения волн на поверхности не должна зависеть от глубины водоема h . Поэтому $f(\gamma) \rightarrow 1$, $\lambda/h \rightarrow 0$. Напротив, на «мелкой» воде, когда $h \ll \lambda$, условия распространения одинаковы для волн с любой λ , удовлетворяющей этому неравенству. Поэтому в этом случае входящая в (2.6.15) функция $f(\gamma) \sim \gamma^{-1/2}$ и скорость v становится пропорциональной произведению $\sqrt{g\lambda}$ и $1/\sqrt{g\lambda}$. Динамический расчет показывает, что коэффициент пропорциональности равен единице. Итак, при $h \ll \lambda$ для v справедливо выражение

$$v = \sqrt{gh}.$$

Именно в таких условиях распространяются цунами — волны в океане с длиной волны в несколько десятков километров. На характерной глубине $h \approx 5$ км скорость таких волн составляет

$$v = \sqrt{50\,000} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 220 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 800 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Задача 2.48. *Сверхзвуковой самолет пролетает над стоящим на земле наблюдателем со скоростью, направленной горизонтально и превышающей скорость звука и в воздухе в k раз ($k > 1$). Наблюдатель слышит звук ударной волны спустя время t после пролета самолета над его головой. Определите высоту, на которой летел самолет.*

Ударная волна образуется, когда скорость самолета превышает скорость звука. Фронт ударной волны представляет собой огибающую фронтов волн, возбуждаемых пролетающим самолетом в каждой точке своей траектории.

Как ясно из рис. 2.48, а, фронт ударной волны можно представить с помощью перпендикулярных ему лучей, задающих направление распространения волны. Луч образует угол α с перпендикуляром

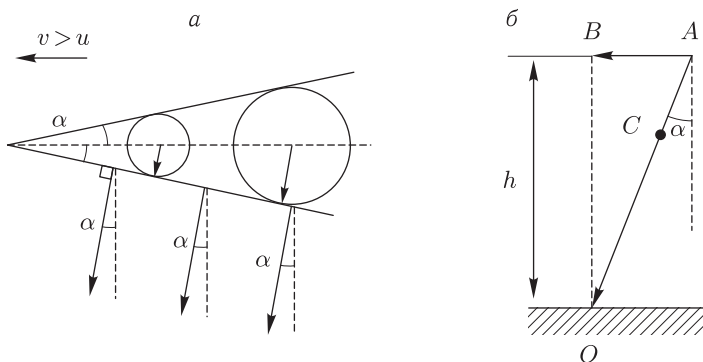


Рис. 2.48.

к направлению полета самолета, синус которого определяется соотношением

$$\sin \alpha = \frac{u}{v}, \quad (2.6.16)$$

где v — скорость самолета. Поэтому к наблюдателю приходит волна, распространяющаяся под углом α к вертикали.

Пусть волна, приходящая к наблюдателю в точке O , возбуждается в точке A . За то время, пока самолет долетит из точки A до точки B , волна успевает дойти до точки C . Путь волны от точки C до наблюдателя в точке O занимает по условию задачи промежуток времени, равный t . Отрезки AB и AO связаны с высотой h , на которой летел самолет, соотношениями (см. рис. 2.48, б)

$$AB = h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$AO = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Для промежутка времени t , в силу изложенного, справедливо равенство

$$t = \frac{h}{u \cos \alpha} - \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{v} = h \left(\frac{1}{u \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{v \cos \alpha} \right). \quad (2.6.17)$$

Выражая $\cos \alpha$ с помощью (2.6.16), получим после элементарных преобразований, что

$$t = \frac{h}{uv} \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Откуда, учитывая, что $k = v/u$, находим следующее выражение для высоты h , на которой летел самолет:

$$h = \frac{kut}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Задача 2.49. Маленькое тело находится в точке A на внутренней поверхности сферы. В каком случае оно быстрее достигнет нижней точки сферы B , скользя по поверхности сферы или по наклонной прямой AB ? Трение отсутствует, начальная скорость тела равна нулю, а расстояние AB много меньше радиуса сферы.

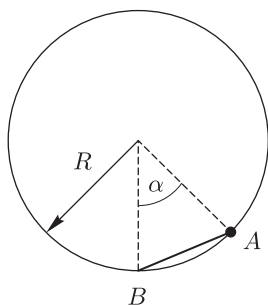


Рис. 2.49.

Очевидно, что, скользя по поверхности сферы, тело будет совершать колебания вокруг точки B . При $\alpha = AB/R \ll 1$ эти колебания будут гармоническими с частотой $\omega = \sqrt{g/R}$, как легко убедиться, рассматривая действующие на тело силы при малом угле $\alpha \neq 0$. Движение по дуге от A до B потребует времени, равного четверти периода колебаний:

$$t = \frac{2\pi}{4} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Расчет времени движения по наклонной плоскости AB элементарен и приводит к результату $t = 2\sqrt{R/g}$. Видно, что двигаясь по поверхности сферы, тело достигнет точки B быстрее.

Результат очевиден и из качественных соображений. Ускорение тела будет больше в начальной точке, если оно движется по дуге, и оно на начальном участке пути наберет большую скорость. А путь, который предстоит пройти при малых α , практически одинаков в обоих случаях.

Задача 2.50. Однородный кабель подвешен вертикально за один конец и натянут собственной силой тяжести. Определите скорость поперечных волн в кабеле как функцию расстояния y от его нижнего конца.

Скорость поперечных волн в кабеле зависит от силы его натяжения. Найти эту зависимость можно с помощью принципа относительности. Рассмотрим поперечную волну, распространяющуюся вправо, как показано на рис. 2.50, а, со скоростью u .

Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с волной с постоянной скоростью u . В этой инерциальной системе отсчета вещество кабеля будет «перетекать» налево по «застывшей» волне со скоростью u . Рассмотрим элемент кабеля, соответствующий максимуму полуволны на рис. 2.50, а, характеризующийся углом α , как показано на рис. 2.50, б, и применим к нему второй закон Ньютона.

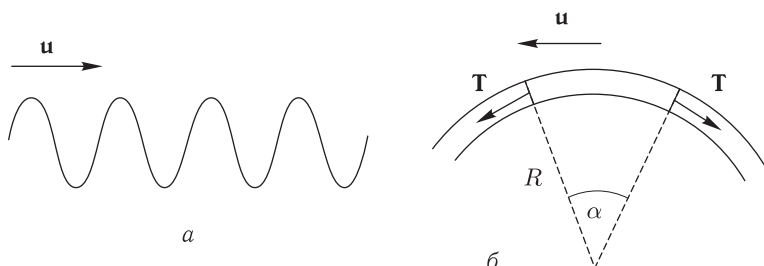


Рис. 2.50.

Учитывая, что длина элемента равна $R\alpha$, а его масса равна $\rho R\alpha$, где ρ — масса единицы длины, получим:

$$\frac{\rho R \alpha u^2}{R} = T \alpha,$$

где T — сила натяжения кабеля, а R — радиус кривизны элемента окружности. Из этого соотношения следует, что $u = \sqrt{T/\rho}$.

Висящий вертикально кабель натянут с разной силой по своей длине. На расстоянии y от нижнего конца он натянут силой тяжести, действующей на массу, равную ρy : $T = \rho y g$. Поэтому для скорости поперечных волн в этом месте кабеля получается значение $u = \sqrt{gy}$.

Глава 3

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ОПТИКА

3.1. Электростатика

Задача 3.1. Два одинаковых маленьких шарика подвешены на шелковых нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Под действием сообщенных им зарядов шарики расходятся так, что угол между нитями равен α . Вследствие потери заряда шарики начинают сближаться. Определите, какую долю заряда потеряет каждый шарик, когда угол между нитями станет равным β .

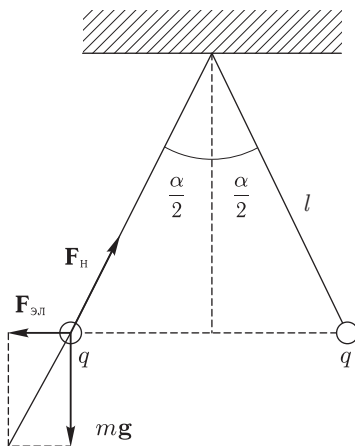


Рис. 3.1.

Условие равновесия шариков имеет вид

$$mg + \mathbf{F}_{эл} + \mathbf{F}_H = 0,$$

откуда, составляя геометрический образ векторного уравнения, получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_{эл}}{mg} = \frac{kq^2}{\left(2l \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 mg}. \quad (3.1.1)$$

После потери части заряда оставшийся заряд можно записать как xq , где $x < 1$. Теперь условие равновесия,

$$mg + \mathbf{F}'_{\text{эл}} + \mathbf{F}'_{\text{н}} = 0,$$

приводит к равенству

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{F'_{\text{эл}}}{mg} = \frac{kx^2 q^2}{\left(2l \sin \frac{\beta}{2}\right)^2 mg}. \quad (3.1.2)$$

Разделив почленно (3.1.1) на (3.1.2) получим уравнение для определения x :

$$x = \frac{\sin \beta/2}{\sin \alpha/2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2}}.$$

Доля потерянного заряда равна $1 - x$.

Задача 3.2. Два одинаковых маленьких шарика с зарядами q_1 и q_2 , подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же?

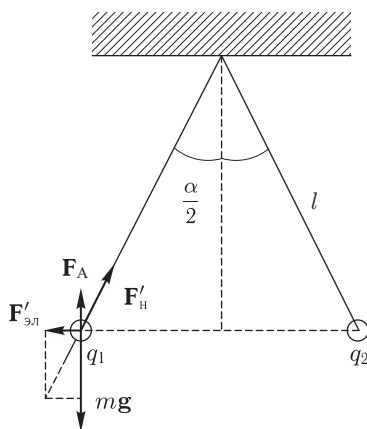


Рис. 3.2.

Когда шарики находятся в воздухе, условие равновесия приводит к равенству (см. задачу 3.1)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_1 q_2}{r^2 \rho g V}, \quad (3.1.3)$$

где ρ и V — плотность и объем шарика.

При помещении в керосин на шарик, кроме сил, действовавших в воздухе, действует еще и сила Архимеда, как показано на рисунке. В этом случае условие равновесия,

$$mg + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}'_{\text{эл}} + \mathbf{F}'_H = 0,$$

приводит к равенству

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_{\text{эл}}}{mg - F_A} = \frac{kq_1q_2}{\varepsilon r^2 V (\rho - \rho_k) g}, \quad (3.1.4)$$

где ρ_k — плотность керосина. Здесь предполагаем, что заряды шариков не изменились.

Сравнивая выражения (3.1.3) и (3.1.4), получаем выражение для плотности материала шариков:

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \rho_k.$$

Отсюда следует, что $\rho > \rho_k$. Это, разумеется, очевидно из качественных соображений.

Задача 3.3. Докажите, что для энергии взаимодействия системы N неподвижных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_N$ справедлива формула

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (3.1.5)$$

где φ_i — потенциал электрического поля, создаваемого всеми зарядами, кроме i -го, в той точке, где находится i -й заряд,

$$\varphi_i = k \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_j}{r_{ij}}. \quad (3.1.6)$$

Здесь r_{ij} — расстояние между i -м и j -м зарядами, а $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Само условие задачи подсказывает, что здесь уместно воспользоваться методом математической индукции, и не выводить формулу (3.1.5), а доказать ее справедливость при наличии j зарядов.

Прежде всего, убедимся, что формула (3.1.5) справедлива для двух точечных зарядов: $j = 2$. Энергия такой системы равна работе, которая совершается внешними силами при внесении точечного заряда q_2 из бесконечности в поле, создаваемое зарядом q_1 . Для этой работы справедливо выражение

$$A = q_2 \varphi_2,$$

где $\varphi_2 = k \frac{q_1}{r_{12}}$.

Из симметрии ситуации ясно, что такая же работа будет совершена при внесении заряда q_1 в поле, создаваемое зарядом q_2 :

$$A = q_1 \varphi_1, \quad \varphi_1 = k \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Поэтому энергию системы можно представить в симметричном виде:

$$W_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i.$$

Приведенные соотношения соответствуют формулам (3.1.5) и (3.1.6). Теперь, предположив справедливость этих формул для системы N зарядов, докажем их справедливость для $(N+1)$ зарядов.

При внесении $(N+1)$ -го заряда энергия системы изменилась на величину, равную работе A при внесении из бесконечности этого заряда:

$$W_{N+1} = W_N + A. \quad (3.1.7)$$

Для работы A справедливо выражение

$$A = q_{N+1} \varphi_{N+1},$$

где

$$\varphi_{N+1} = k \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{j,N+1}} \quad (3.1.8)$$

представляет собой потенциал, создаваемый всеми N зарядами в точке, куда помещается $(N+1)$ -й заряд.

После внесения $(N+1)$ -го заряда изменяются потенциалы всех точек, кроме той, в которую помещается $(N+1)$ -й заряд, поскольку точечный заряд не действует сам на себя. Потенциал φ'_i точки, в которой находится i -й заряд, теперь будет равен:

$$\varphi'_i = \varphi_i + k \frac{q_{N+1}}{r_{i,N+1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad \varphi'_{N+1} = \varphi_{N+1}.$$

Выразим энергию W_{N+1} системы $(N+1)$ зарядов (3.1.7) через новые потенциалы φ'_i :

$$W_{N+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\varphi'_i - k \frac{q_{N+1}}{r_{i,N+1}} \right) + q_{N+1} k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i,N+1}}. \quad (3.1.9)$$

В последнем слагаемом в правой части использовано выражение (3.1.8) для φ_{N+1} , в котором индекс суммирования k заменен на i . В выражении (3.1.9) можно привести подобные члены, в результате чего оно принимает следующий вид:

$$W_{N+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i + \frac{1}{2} q_{N+1} k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i,N+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i + \frac{1}{2} q_{N+1} \varphi'_{N+1}.$$

Таким образом, доказана справедливость выражения

$$W_{N+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} q_i \varphi'_i,$$

где

$$\varphi'_i = k \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N+1} \frac{q_k}{r_{ik}}.$$

Знак «штрих» в выражении для потенциала не несет никаких изменений в смысле формулы (3.1.8). Он появляется в процессе доказательства только для введения отличия потенциала, создаваемого N зарядами, от потенциала, создаваемого $(N + 1)$ зарядами.

При рассмотрении следующей ситуации также весьма эффективным оказывается применение методологических принципов, позволяющих найти красивое и изящное решение.

Задача 3.4. В центре плоского равномерно заряженного квадрата потенциал электрического поля равен φ . Определить потенциал φ_1 в углу квадрата.

Единственными параметрами задачи являются заряд и сторона квадрата, то есть потенциал любой точки квадрата является функцией двух параметров — заряда q и стороны квадрата a : $\varphi = f(q; a)$. Из соображений размерности понятно, что данная функция может иметь только единственный вид:

$$\varphi = C \frac{q}{a}, \quad (3.1.10)$$

где C — некоторая константа (в системе СИ эта величина размерная, включающая k). Аналогичные рассуждения можно провести для потенциала в углу квадрата, где C_1 — другая константа:

$$\varphi_1 = C_1 \frac{q}{a}.$$

С другой стороны заданный квадрат можно составить из четырех одинаковых квадратов со стороной $a/2$ и зарядом $q/4$, потенциал в углу каждого из которых будет равен φ'_1 , причем

$$\varphi'_1 = f\left(\frac{q}{4}; \frac{a}{2}\right),$$

то есть

$$\varphi'_1 = C_1 \frac{q/4}{a/2}. \quad (3.1.11)$$

Из принципа суперпозиции следует, что потенциал в центре большого квадрата есть сумма потенциалов в углах малых квадратов:

$$\varphi = 4\varphi'_1.$$

Тогда из (3.1.10) и (3.1.11) получаем соотношение коэффициентов C и C_1 :

$$C \frac{q}{a} = 4C_1 \frac{q}{4} \cdot \frac{2}{a}, \quad C = 2C_1,$$

а следовательно

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi.$$

Задача 3.5. Точечный заряд q находится между двумя заземленными проводящими концентрическими сферами с радиусами r и R на расстоянии a от центра: $r < a < R$. Найдите индуцированные на сферах заряды.

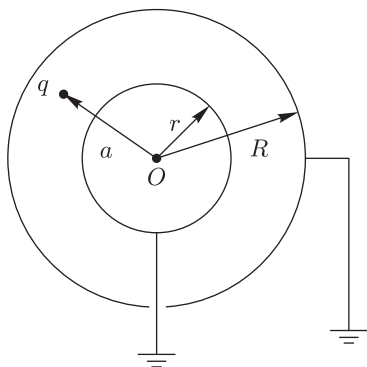


Рис. 3.5.

Поскольку проводящие сферы заземлены, то электрическое поле существует только в промежутке между сферами. Точнее, только в этом промежутке отлична от нуля напряженность электрического поля. Поскольку силовые линии поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, а индуцированные на сферах заряды противоположны по знаку точечному заряду q , то сразу приходим к уравнению, связывающему q с индуцированными зарядами q_r и q_R :

$$q + q_r + q_R = 0.$$

Подробное объяснение этому явлению можно найти в книге [2].

Второе независимое уравнение можно получить, используя принцип суперпозиции для потенциала электрического поля. Поскольку индуцированные заряды расположены по внешней поверхности внутренней сферы и на внутренней поверхности внешней сферы, то независимо от их распределения по поверхностям сфер расстояние до центра будет одинаковым для всех зарядов, образующих q_r и q_R , хотя, разумеется, разным для зарядов на разных сферах. При заземленных сферах потенциал точки, где расположен центр сфер, можно считать равным нулю, так как внутри малой сферы потенциал не меняется. Поэтому с помощью принципа суперпозиции приходим к уравнению:

$$\frac{q}{a} + \frac{q_r}{r} + \frac{q_R}{R} = 0.$$

Решая совместно получившуюся систему уравнений, найдем:

$$q_r = -q \frac{r}{a} \cdot \frac{R-a}{R-r}, \quad q_R = -q \frac{R}{a} \cdot \frac{a-R}{R-r}.$$

Полученный результат удовлетворяет очевидному частному случаю: при $r = 0$ внутренняя сфера отсутствует, и приведенные формулы дают очевидный результат $q_r = 0$, $q_R = -q$.

Задача 3.6. На плоский воздушный конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 1,5$ см подают напряжение $U = 39$ кВ. Будет ли пробит конденсатор, если предельная напряженность электрического поля в воздухе $E_1 = 30$ кВ/см? Будет ли пробит конденсатор, если внутрь его параллельно обкладкам ввести стеклянную пластинку толщиной $d_1 = 0,3$ см, если предельная напряженность поля для стекла $E_2 = 100$ кВ/см?

До введения стеклянной пластинки напряженность поля в конденсаторе $E = \frac{U}{d} = 26 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$ меньше предельного значения E_1 , поэтому конденсатор пробит не будет.

После введения стеклянной пластинки с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$ напряженность поля в воздушном промежутке E_v можно определить из выражения

$$E_v(d - d_1) + \frac{E_v}{\varepsilon}d_1 = U,$$

откуда для E_v получаем значение $E_v = 31,4$ кВ/см, что больше предельного значения E_1 для воздуха. В результате воздушный зазор в конденсаторе будет пробит. После этого напряженность поля в стеклянной пластинке E_c станет равной

$$E_c = \frac{U}{\varepsilon d_1} \approx 185 \frac{\text{кВ}}{\text{см}},$$

что больше предельного значения E_2 для стекла. В результате будет пробита и стеклянная пластинка, то есть весь конденсатор.

Задача 3.7. К батарее из последовательно соединенных n одинаковых конденсаторов, емкостью C каждый, приложено постоянное напряжение U . Один из конденсаторов пробивается. Определите изменение энергии батареи, работу разряда и работу источника питания. Работа разряда A_p — это величина, равная энергии электрического поля, которая переходит в другие виды (тепло, свет, звук) при пробое конденсатора.

До пробоя конденсатора емкость батареи составляла $C_n = \frac{C}{n}$, а ее энергия была равна

$$W_0 = \frac{C_n U^2}{2} = \frac{C U^2}{2n}.$$

После пробоя одного конденсатора емкость батареи станет равной $C_{n-1} = \frac{C}{n-1}$, а ее энергия

$$W = \frac{C_{n-1}U^2}{2} = \frac{CU^2}{2(n-1)},$$

так что

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{CU^2}{2n(n-1)} > 0. \quad (3.1.12)$$

Энергия батареи увеличилась, несмотря на то, что при пробое конденсатора часть энергии электрического поля оказалась утерянной. Однако считать, что в другие виды энергии переходит только энергия электрического поля в пробиваемом конденсаторе, было бы неправильно. При пробое одного из конденсаторов источник питания поддерживает на клеммах батареи конденсаторов неизменную разность потенциалов U . Поскольку емкость батареи увеличивается от значения C_n до C_{n-1} , то увеличивается и заряд на обкладках конденсаторов:

$$\Delta q = q - q_0 = C_{n-1}U - C_nU = \frac{CU}{n(n-1)}.$$

Источник питания при этом совершает работу, равную

$$A_{\text{ист}} = U\Delta q = \frac{CU^2}{2n(n-1)}. \quad (3.1.13)$$

На основании закона сохранения энергии

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + A_p,$$

откуда работа разряда A_p равна

$$A_p = A_{\text{ист}} - \Delta W = \frac{CU^2}{2n^2(n-1)}. \quad (3.1.14)$$

До пробоя одного конденсатора энергия W_1 каждого из них была в n раз меньше энергии всей батареи, то есть

$$W_1 = \frac{CU^2}{2n^2}.$$

Из выражения (3.1.14) видно, что работа разряда оказывается больше запаса энергии конденсатора до его пробоя:

$$A_p - W_1 = \frac{CU^2}{2n^2(n-1)} > 0,$$

причем

$$\frac{A_p - W_1}{W_1} = \frac{1}{n-1}.$$

Отсюда видно, что чем больше конденсаторов в батарее, тем меньше отличается работа разряда от энергии пробиваемого конденсатора.

Задача 3.8. Как связана работа источника питания, заряжающего батарею конденсаторов емкости C , с энергией электрического поля заряженной батареи?

Фактически ответ уже известен. Для этого нужно только сравнить между собой выражения (3.1.12) и (3.1.13). Работа источника питания в два раза больше запаса энергии батареи конденсаторов. Этот результат имеет совершенно общий характер. При сообщении батарее заряда q источник питания с напряжением U совершает работу, равную

$$A_{\text{ист}} = Uq = CU^2.$$

Энергия батареи конденсаторов W равна

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Видно, что $A_{\text{ист}} = 2W$. Уравнение закона сохранения энергии при зарядке батареи конденсаторов имеет вид

$$A_{\text{ист}} = W + A + Q, \quad (3.1.15)$$

где A — механическая работа сил электрического поля, которая может совершаться в некоторых случаях (например, если в процессе зарядки происходит перемещение пластин), а Q — выделяющееся тепло.

Обратим внимание на то, что работа A в правой части равенства (3.1.15) — это работа сил электрического поля, совершаемая за счет запаса энергии источника питания, заряжающего конденсаторы. Однако изменить энергию конденсатора можно не только за счет работы источника питания, но и путем совершения механической работы внешними силами, если, разумеется, конденсатор уже обладал электрическим зарядом.

Задача 3.9. Между обкладками плоского конденсатора находится диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ , заполняющая все пространство между ними. Конденсатор подключен к источнику питания. Что нужно сделать с пластинами конденсатора — сдвинуть или раздвинуть и насколько, чтобы энергия конденсатора, равная вначале

$$W_0 = \frac{CU^2}{2} = \frac{C_0\epsilon U^2}{2}$$

(где C_0 — емкость конденсатора без диэлектрической пластины), приняла первоначальное значение в каждом из перечисленных случаев:

- 1) размыкается ключ, соединяющий конденсатор с источником питания, затем вынимается диэлектрическая пластина;

- 2) *вынимается диэлектрическая пластина, затем размыкается ключ;*
- 3) *вынимается диэлектрическая пластина, но конденсатор все время остается подсоединенным к источнику питания.*

Во всех рассматриваемых случаях емкость C конденсатора с диэлектрической пластиной между обкладками определяется выражением

$$C = \varepsilon C_0 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где S и d — площадь одной из обкладок и расстояние между обкладками. Рассмотрим поочередно указанные в условии задачи случаи.

1. После размыкания ключа заряд на обкладках конденсатора, равный вначале $q = CU$, остается неизменным, а емкость после удаления диэлектрической пластины уменьшается и становится равной C_0 . Энергия конденсатора W , для которой при неизменном заряде следует использовать выражение

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

увеличивается и становится равной $W = \varepsilon W_0$. Отключенный источник питания при этом работы не совершает. Значит, увеличение энергии конденсатора происходит за счет работы внешней силы, удалившей диэлектрическую пластину. Отсюда сразу можно сделать вывод, что диэлектрическая пластина затягивается электрическими силами в область, где существует электрическое поле, иначе при удалении пластины внешней силе не потребовалось бы совершать работы.

Вернуть энергию конденсатора к ее первоначальному значению W_0 без изменения заряда конденсатора можно, сделав его емкость C_1 без пластины равной первоначальной емкости с пластиной C , то есть сдвинув пластины конденсатора на величину x , определяемую соотношением

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{1}{d - x}, \quad (3.1.16)$$

поскольку емкость конденсатора со сдвинутыми пластинами C_1 равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x}.$$

Из соотношения (3.1.16) получаем

$$x = d \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

2. После вынимания диэлектрической пластины емкость конденсатора становится равной C_0 , заряд на обкладках уменьшается, уменьшается и значение энергии, для которой при неизменном напряжении

на обкладках (конденсатор присоединен к источнику питания во время вынимания пластины) удобнее использовать выражение

$$W = \frac{C_0 U^2}{2} = \frac{W_0}{\varepsilon}. \quad (3.1.17)$$

После размыкания ключа на обкладках конденсатора остается неизменным уже новый заряд $q = C_0 U$, и для того, чтобы вернуть энергию к прежнему значению, нужно уменьшить емкость конденсатора, то есть раздвинуть пластины на такую величину x , чтобы выполнялось равенство

$$\frac{q^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon C_0 U^2}{2},$$

где C_2 — емкость конденсатора без пластины с обкладками, сдвинутыми на расстояние x :

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d + x}.$$

Отсюда, используя выражение $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, получаем

$$\frac{1}{d} = \frac{\varepsilon}{d + x}$$

и для x находим $x = d(\varepsilon - 1)$.

Обратим внимание на энергетические превращения, происходящие в этом случае. Внешняя сила совершает положительную работу при вынимании пластины, но, несмотря на это, энергия конденсатора уменьшается. Это означает, что источник питания совершает отрицательную работу, забирая часть электрического заряда с пластин конденсатора. Нетрудно составить уравнение закона сохранения энергии и найти работу $A_{\text{ист}}$, совершаемую внешней силой при вынимании пластины:

$A_{\text{ист}} + A_{\text{внеш}} = \Delta W$, где

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = (C_0 - \varepsilon C_0) U^2 < 0,$$

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{C_0 U^2}{2} (1 - \varepsilon) < 0.$$

Отсюда находим

$$A_{\text{внеш}} = \frac{C_0 U^2}{2} (\varepsilon - 1) > 0.$$

3. После вынимания пластины энергия конденсатора дается выражением (3.1.17), то есть уменьшается, но теперь все время остается неизменным напряжение на обкладках конденсатора. Поэтому увеличить энергию можно, увеличив емкость конденсатора, то есть сблизить его обкладки. Легко видеть, что уравнение, определяющее сдвиг пластины, совпадает с (3.1.16), хотя причина, по которой здесь приходится сближать обкладки, принципиально отличается от рассмотренной

в п. 1. Действительно, при неизменном напряжении на обкладках условие возвращения энергии конденсатора к первоначальному значению имеет вид

$$\frac{\varepsilon C_0 U^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2},$$

где C_1 — емкость конденсатора со сдвинутыми на расстояние x пластинами, $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-x}$, что совпадает с выражением, полученным в п. 1.

Баланс энергетических превращений при вынимании пластины в данном случае имеет вид

$$A_{\text{ист}} + A_{\text{внеш}} = \Delta W,$$

где, как и во втором случае:

- 1) источник совершает отрицательную работу, забирая часть заряда с пластины конденсатора,

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = (C_0 - \varepsilon C_0) U^2 < 0;$$

- 2) приращение энергии отрицательно: $\Delta W = \frac{C_0 U^2}{2} (1 - \varepsilon) < 0;$

- 3) а работа внешней силы положительна.

Все здесь происходит точно так же, как и во втором случае, что совершенно очевидно, так как на этапе вынимания пластины эти случаи не различаются. Но затем, на этапе восстановления первоначального значения энергии в отличие от случая 2, пластины нужно сближать, так как это восстановление происходит не при неизменном заряде, а при неизменном напряжении. Отличие от первого случая заключается в том, что теперь энергия возрастает за счет работы источника питания, тогда как в первом случае она уменьшалась в результате исчезновения части электрического поля при сближении пластин при отключенном источнике питания.

Задача 3.10. *Имеется батарея конденсаторов, соединенных произвольным, достаточно сложным образом между собой. Две из обкладок (наружные обкладки) выделены, емкость батареи измеряется при подсоединении прибора к этим обкладкам. Внутри батареи имеется ключ K , не соединенный с наружными обкладками. Как повлияет замыкание ключа K на электроемкость батареи?*

Задачу проще всего анализировать, исходя из энергетических соображений. Зарядим батарею конденсаторов при разомкнутом ключе K и отсоединим от источника питания. Теперь при замыкании ключа K полный заряд батареи, то есть заряд на наружных обкладках изменить не может. Однако внутри цепи может произойти перераспределение и даже частичная компенсация зарядов, что приведет к убыли энергии электрического поля батареи. Поскольку энергия $W = \frac{q^2}{2C}$, где q —

полный заряд, а C — емкость батареи, то видно, что емкость системы может только увеличиваться, если энергия системы уменьшается при перераспределении зарядов внутри системы, или остается неизменной, если при замыкании ключа K перераспределения зарядов не происходит и энергия батареи не изменяется.

3.2. Цепи постоянного тока

Задача 3.11. Определить сопротивление R_∞ бесконечной цепочки, показанной на рис. 3.11, а, если сопротивление R всех ее элементов одинаковы.

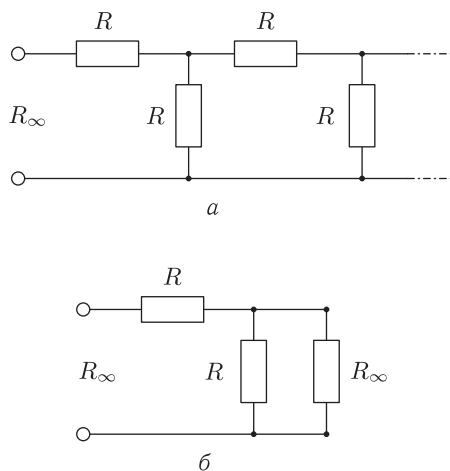


Рис. 3.11.

Для расчета сопротивления таких экзотических бесконечных цепочек, решеток и подобных соединений следует попытаться найти какую-либо симметрию системы. В данном простейшем случае система симметрична относительно сдвига (т. е. не изменяется при отключении или подключении одного звена цепочки) вследствие бесконечности цепочки. Поэтому эквивалентная схема изображена на рис. 3.11, б, где мы заменили всю цепочку, следующую за первым звеном, на сопротивление R_∞ . Теперь расчет становится элементарным. Имеем

$$R_\infty = R + \frac{RR_\infty}{R + R_\infty}.$$

Это равенство эквивалентно квадратному уравнению для R_∞ :

$$R_\infty^2 - RR_\infty - R^2 = 0.$$

Решая это уравнение и учитывая, что физический смысл имеет только положительное значение R_∞ , получаем

$$R_\infty = R \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Расчет сопротивлений подобных цепочек и решеток при конечном числе звеньев более сложен. С методами решения таких задач можно ознакомиться по пособиям [2,10].

Задача 3.12. К концам некоторого сопротивления R приложено напряжение $U = 100$ В. Вольтметр, включенный параллельно участку с сопротивлением $R_1 = 0,4R$, показывает $U_1 = 18,2$ В. Найти отношение сил токов через вольтметр и через участок цепи, параллельно которому включен вольтметр.

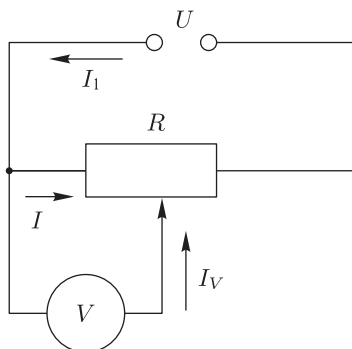


Рис. 3.12.

Идеальный вольтметр ($R_V \rightarrow \infty$) показывал бы напряжение 40 В. Поскольку вольтметр показывает меньшее напряжение, его сопротивление конечно и поэтому в вольтметр частично ответвляется ток, идущий по неразветвленному участку цепи. Для нахождения этого тока не обязательно знать сопротивление вольтметра. По закону Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U_1}{0,4R}.$$

Аналогично для тока в неразветвленной части имеем

$$I_1 = \frac{U - U_1}{0,6R}.$$

Теперь для тока через вольтметр получим

$$I_V = I_1 - I = \frac{1}{R} \left(\frac{U - U_1}{0,6} - \frac{U_1}{0,4} \right).$$

Составляя отношение I_V/I и подставляя в него заданные числовые значения напряжений, получаем $I_V/I = 2$. Таким образом, решение задачи сводится к использованию соотношений, связывающих напряжения и токи в последовательных и параллельных участках цепи.

Задача 3.13. *Определите электродвижущую силу $\mathcal{E}$ элемента, если при увеличении внешнего сопротивления цепи в n раз разность потенциалов на зажимах элемента, равная U , увеличивается на k процентов.*

Используя законы Ома для участка цепи и для замкнутой цепи, имеем

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}}{R + r} R. \quad (3.2.1)$$

После увеличения внешнего сопротивления R в n раз аналогичное равенство имеет вид

$$U_1 = (1 + k)U = I_1 R_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} = \frac{\mathcal{E}}{nR + r} nR, \quad (3.2.2)$$

где $k = \frac{k\%}{100\%}$ — правильная дробь.

Основная техническая трудность при решении данной задачи — это решение системы двух уравнений (3.2.1) и (3.2.2), когда на первый взгляд кажется, что эта система содержит три неизвестных величины $\mathcal{E}$, r и R . Поэтому необходимо увидеть, что в действительности эта система содержит только две независимые неизвестные величины $\mathcal{E}$ и $\gamma = r/R$. Для этого систему уравнений можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mathcal{E}}{1 + \gamma}, \\ (1 + k)U &= \frac{\mathcal{E}}{(1 + \gamma/n)}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Решая получившуюся систему уравнений, получаем

$$\mathcal{E} = U \frac{(1 + k)(n - 1)}{n - k - 1}. \quad (3.2.4)$$

При анализе электрических цепей такая ситуация является довольно обычной, и важно уметь выявлять истинное число независимых неизвестных величин.

Интересно исследовать полученный результат в частных и предельных случаях. На зажимах разомкнутого элемента напряжение U равно его ЭДС. При $R \rightarrow \infty$, n также стремится к бесконечности, и из (3.2.4) следует, что $U = \mathcal{E}$, если $k = 0$. Именно такой результат и получается из соотношения для γ . Действительно, для γ при решении системы уравнений получаем выражение

$$\gamma = \frac{nk}{n - k - 1}. \quad (3.2.5)$$

При $n \rightarrow \infty$, $\gamma/R \rightarrow 0$ и коэффициент k действительно стремится к нулю. Формула (3.2.4) имеет смысл и при коротком замыкании элемента, когда $\gamma \rightarrow \infty$, а $U = 0$. Из (3.2.5) следует, что этому случаю соответствует условие $n - k - 1 = 0$, и соотношение (3.2.4), переписанное в виде

$$(n - k - 1) \mathcal{E} = U (1 + k) (n - 1),$$

оказывается справедливым, хотя и не дает возможности определить ЭДС. Полученная формула включает в себя частный случай $n = 1$, при котором, естественно, $k = 0$.

Задача 3.14. Для определения внутреннего сопротивления гальванического элемента можно воспользоваться схемой, показанной на рисунке. Оказывается, что сопротивления R можно подобрать так, чтобы показания гальванометра не зависели от того, в каком положении — B или C — находится переключатель K . На практике, сопротивление R подбирают, используя магазин калиброванных сопротивлений. После этого, по известным значениям сопротивлений R и сопротивления гальванометра R_g можно определить внутреннее сопротивление источника r . Докажите приведенное выше утверждение и определите r .

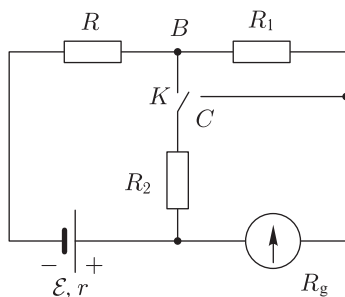


Рис. 3.14, а.

Технически задачу проще решать, «собирая» ЭДС источника в этих двух случаях как сумму напряжений в цепи, и не «дробя» токи в параллельные ветви схемы. Пусть K находится в положении C . Тогда

$$\frac{I_g}{I_{R_2}} = \frac{R_2}{R_g}.$$

Ток в неразветвленной части цепи равен

$$I = I_g + I_{R_2} = I_g \left(1 + \frac{R_g}{R_2} \right),$$

и на основании закона Ома для замкнутой цепи справедливо выражение

$$\mathcal{E} = I(r + R + R_1) + I_g R_g = I_g \left(R_g + \left(\frac{R_g}{R_2} \right) (r + R + R_1) \right). \quad (3.2.6)$$

Совершенно аналогично в случае, когда переключатель K находится в положении B , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{I_g}{I'_{R_2}} &= \frac{R_2}{R_g + R_1}, \\ I' &= I_g + I'_{R_2} = I_g \left(1 + \frac{R_g + R_1}{R_2} \right), \\ \mathcal{E} &= I'(R + r) + I_g \left(R_g + R_1 + \left(1 + \frac{R_g + R_1}{R_2} \right) (r + R) \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Приравнивая значения $\mathcal{E}$, даваемые соотношениями (3.2.6) и (3.2.7), после элементарных алгебраических преобразований получаем

$$r = R_g - R.$$

Можно привести другое решение, основанное на замене данной в задаче цепи на эквивалентную, но более простую цепь.

Заметим, прежде всего, что ток последовательно идет через сопротивления r и R , так что во все формулы входит их сумма. Фактически величина R есть просто добавка к внутреннему сопротивлению источника. Поэтому можно решать задачу, положив $R = 0$, а за тем в окончательных формулах заменить r на $r + R$.

Чтобы получить решение, найдем ток через гальванометр в более простой цепи, изображенной на рисунке.

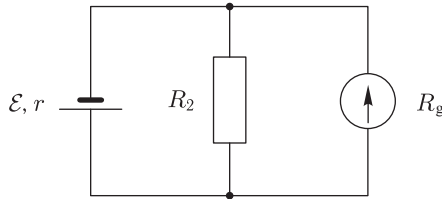


Рис. 3.14, б.

Выражение для тока является функцией от параметров r , R_g и R_2 : $I_g(r, R_g, R_2)$. Выражения для тока при ключе в положении B получается простой заменой $R_g \rightarrow R_g + R_1$, а при ключе в положении C — заменой $r \rightarrow r + R_1$. Для нахождения тока через гальванометр вначале находим ток через источник питания,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_g R_2}{R_g + R_2}},$$

затем напряжение на клеммах источника питания,

$$U = E - Ir,$$

и, наконец, ток через гальванометр:

$$I_g = \frac{U}{R_g}.$$

Собирая все вместе, получаем выражение для тока через гальванометр:

$$I_g = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_2(r + R_g) + rR_g}.$$

Простой анализ выражения показывает, что числитель и первое слагаемое знаменателя не зависят от того, какую из замен мы делаем: $R_g \rightarrow R_g + R_1$ или $r \rightarrow r + R_1$. Чтобы при любой из этих замен второе слагаемое в знаменателе было одним и тем же, необходимо выполнение равенства:

$$(r + R_1)R_g = r(R_g + R_1),$$

откуда сразу следует, что $r = R_g$.

Сделав теперь замену r на $r + R$, получим ответ: $r = R_g - R$.

Задача 3.15. Два вольтметра, соединенных между собой последовательно, подключены к клеммам источника тока и показывают напряжения U_1 и U_2 . При подключении только одного первого вольтметра он показывает напряжение U_3 . Определите ЭДС источника тока.

Можно составить уравнения, выражающие ЭДС источника тока как сумму напряжений в замкнутой цепи. При подключении двух вольтметров имеем

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 + Ir. \quad (3.2.8)$$

где r — внутреннее сопротивление источника тока.

Силу тока в цепи в этом случае можно выразить через показания первого вольтметра U_1 и его сопротивление R_V :

$$I = \frac{U_1}{R_V}. \quad (3.2.9)$$

Подставляя (3.2.9) в (3.2.8), получаем равенство

$$\mathcal{E} = U_1 \left(1 + \frac{r}{R_V}\right) + U_2. \quad (3.2.10)$$

При включении только первого вольтметра аналогичные равенства будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_3 + I'r, \quad I' = \frac{U_3}{R_V}, \\ \mathcal{E} &= U_3 \left(1 + \frac{r}{R_V}\right). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Теперь видно, что равенства (3.2.10) и (3.2.11) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными величинами $\mathcal{E}$ и $\left(1 + \frac{r}{R_V}\right)$. Решая ее, находим ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{U_2 U_3}{U_3 - U_1}.$$

Легко видеть, что поскольку $U_3 > U_1$ всегда $\mathcal{E} > 0$.

Задача 3.16. Два гальванических элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = R$, идеальный вольтметр ($R_V \rightarrow \infty$) со шкалой, нуль которой находится на ее середине, и внешнее сопротивление R соединены по схеме, показанной на рис. 3.16. При разомкнутом ключе K стрелка вольтметра отклоняется вправо. При каком условии стрелка вольтметра при замкнутом ключе K : 1) отклоняется вправо; 2) отклоняется влево; 3) остановится на нуле?

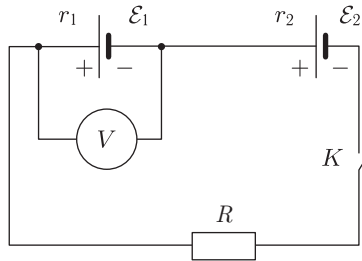


Рис. 3.16.

При разомкнутом ключе K идеальный вольтметр показывает напряжение U , равное ЭДС элемента $\mathcal{E}_1$. При замкнутом ключе в этой цепи идет ток, равный

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3R}.$$

Теперь на зажимах элемента $\mathcal{E}_1$ напряжение U определяется соотношением

$$U = \mathcal{E}_1 - I r_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3} = \frac{2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{3}.$$

При положительном значении U элемент нормально работает и напряжение на его зажимах будет той же полярности, что и при разомкнутой цепи. Поэтому при $2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 > 0$ стрелка вольтметра отклоняется в ту же сторону, что и при разомкнутом ключе K , т.е. вправо. При $2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 < 0$ стрелка вольтметра отклонится влево, а при $2\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ останется на нуле.

Ответ можно получить, не выписывая приведенных выше уравнений, используя следующие рассуждения. Максимальный ток, который может давать источник питания во внешней цепи, равен току короткого

замыкания. Если ток в работающей цепи меньше тока короткого замыкания данного источника (включенного в эту цепь), то он работает в нормальном режиме, а напряжение на его зажимах имеет ту же полярность, что и при разомкнутой цепи. Если ток в цепи больше тока короткого замыкания данного источника, то это значит, что в цепи имеется еще какой-либо источник тока, а полярность напряжения на зажимах рассматриваемого источника будет противоположна той, которая была бы при разомкнутой цепи.

Таким образом, полярность напряжения на зажимах работающего источника тока будет такой же, как и при разомкнутой цепи, если его ток короткого замыкания больше, чем ток в цепи при двух работающих источниках тока:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{R} > \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3R}.$$

Отсюда видно, что стрелка отклонится вправо при $2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 > 0$.

Следует отметить, что этот результат имеет общий характер при любых значениях внутренних сопротивлений, то есть источник тока в последовательной электрической цепи работает нормально (отдает энергию во внешнюю цепь), если ток в цепи I меньше тока короткого замыкания этого источника тока. Действительно, при выполнении условия

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}, \quad (3.2.12)$$

ток короткого замыкания элемента $\mathcal{E}_1$ будет больше тока, создаваемого в цепи одним вторым элементом с ЭДС $\mathcal{E}_2$:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} > \frac{\mathcal{E}_2}{R + r_2}. \quad (3.2.13)$$

При этом напряжение на зажимах первого элемента в работающей цепи,

$$U = \mathcal{E}_1 - Ir_1, \quad (3.2.14)$$

будет положительным (то есть будет той же полярности, что и при разомкнутой цепи), что можно увидеть, подставляя в выражение (3.2.14) значение тока из (3.2.12) и учитывая неравенство (3.2.13).

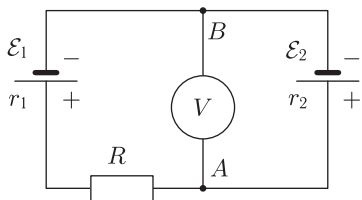


Рис. 3.17, а.

Задача 3.17. Собрана электрическая цепь, схема которой показана на рисунке. Известны значения ЭДС и внутренних сопротивлений обоих элементов и сопротивление R нагрузки. Вольтметр идеальный, то есть ($R_V \rightarrow \infty$). Определите напряжение U , показываемое вольтметром.

Идеальный вольтметр только показывает напряжение, равное разности потенциалов между точками, к которым он подсоединен, а ток в вольтметр не ответвляется. Чтобы судить о полярности напряжения, определим его как разность потенциалов между точками A и B .

$$U = \varphi_A - \varphi_B.$$

Предположим, что $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. Тогда ток I в цепи идет против часовой стрелки и для него можно написать выражения с помощью закона Ома для замкнутой цепи и для неоднородного участка цепи. В первом случае имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}. \quad (3.2.15)$$

Во втором случае, рассматривая участок цепи от точки A до точки B , содержащей $\mathcal{E}_2$, находим силу тока

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \mathcal{E}_2}{r_2} = \frac{U - \mathcal{E}_2}{r_2}. \quad (3.2.16)$$

Приравнивая правые части этих выражений, получаем напряжение U :

$$U = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 (r_1 + R)}{r_1 + r_2 + R}. \quad (3.2.17)$$

Теперь предположим, что $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$. В этом случае ток I_1 в цепи идет по часовой стрелке и, составляя для него выражения с помощью тех же законов, получаем:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2 + R}, \quad (3.2.18)$$

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \mathcal{E}_1}{r_1 + R} = \frac{U - \mathcal{E}_1}{r_1 + R}. \quad (3.2.19)$$

Здесь мы рассмотрим участок цепи от точки A до точки B , содержащий элемент $\mathcal{E}_1$. Приравнивая правые части выражений (3.2.18) и (3.2.19), приходим к тому же самому выражению (3.2.17) для напряжения U , показываемого вольтметром. Отметим, что и его значение, и его полярность одинаковы в обоих случаях.

Обратим внимание на то, что при $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ величина U лежит в интервале

$$x_2 < U < x_1. \quad (3.2.20)$$

Справедливость правой части неравенства (3.2.20) проще всего увидеть, составив выражение для тока I (при $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$), рассматривая неоднородный участок цепи, содержащий $\mathcal{E}_1$:

$$I = \frac{\varphi_B - \varphi_A + \mathcal{E}_1}{r_1 + R} = \frac{-U + \mathcal{E}_1}{r_1 + R},$$

откуда

$$U = \mathcal{E}_1 - I(r_1 + R) < \mathcal{E}_1. \quad (3.2.21)$$

Справедливость двойного неравенства (3.2.20), разумеется, очевидна и из физических соображений. Ток через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_2$ идет в направлении, противоположном тому, которое было бы в случае, когда один этот элемент был бы замкнут на внешнее сопротивление. Это возможно только при $U > \mathcal{E}_2$. Напряжение U меньше ЭДС элемента $\mathcal{E}_1$ поскольку ток в цепи направлен так же, как и в случае, когда в цепь включен только этот элемент.

При $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ величина U лежит в интервале $\mathcal{E}_1 < U < \mathcal{E}_2$, что легко доказать любым из приведенных выше способов. При $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, как следует из (3.2.17), $U = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, что очевидно также из физических соображений, ибо ток в цепи отсутствует.

Можно развить сюжет задачи далее, и выяснить, могут ли показания вольтметра быть равными нулю.

Возвращаясь к предыдущему решению и анализируя результаты, можно прийти к выводу, что обнулить показания вольтметра можно только, сменив полярность подключения в цепь одного из источников.

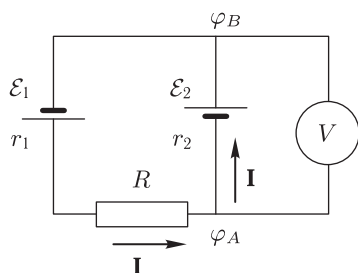


Рис. 3.17, б.

При этом сила тока в такой цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}.$$

Напряжение на зажимах первого элемента составляет

$$U_1 = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R}.$$

Последнее выражение позволяет проанализировать, при каких условиях это напряжение может быть равно нулю.

1. $\mathcal{E}_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_2 r_1 = 0$, а следовательно сопротивление резистора должно удовлетворять условию

$$R = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1} - r_2.$$

2. Значение R должно быть положительно, а следовательно

$$\frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1} - r_2 \geq 0.$$

Это значит, что

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \geq \frac{\mathcal{E}_1}{r_1},$$

т. е. ток короткого замыкания второго источника больше тока короткого замыкания первого источника.

Таким образом, приходим к выводу, что обнулить показания вольтметра, подбирая соответствующее сопротивление резистора, можно

только в том случае, если вольтметр подключен к источнику с меньшим током короткого замыкания.

Заметим, что все формулы в задаче можно сделать более симметричными, если воспользоваться идеей, предложенной в задаче 3.14, а именно вначале сделать замену $r_1 + R \rightarrow r_1$, а после того, как решение получено — обратную замену $r_1 \rightarrow r_1 + R$.

Задача 3.18. Как было выяснено при решении предыдущей задачи, напряжение, показываемое идеальным вольтметром, определяется выражением (3.2.17) и не зависит от того, какая из ЭДС $\mathcal{E}_1$ или $\mathcal{E}_2$ больше. Как, не размыкая цепи, обеспечивающей ток через сопротивление R , определить, какая из ЭДС больше?

Для этого достаточно переключить зажим вольтметра, соединенный с точкой A , так как показано на рисунке, т.е. соединить его с точкой A_1 . Тогда при $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ показание вольтметра увеличится, а при $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ уменьшится. При $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ оно останется неизменным. Это совершенно очевидно из качественных физических соображений, поскольку, например, при $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ напряжение U_1 между точками A_1 и B — это напряжение на клеммах «нормально» работающего элемента $\mathcal{E}_1$, которое больше любого напряжения на участках внешней цепи. Разумеется, этот результат может быть получен и формально. Рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи, получим при $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$:

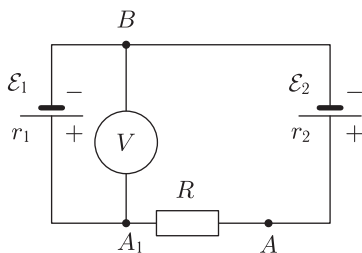


Рис. 3.18.

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}, \quad I = \frac{\varphi_B - \varphi_A - \mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{-U + \mathcal{E}_1}{r_1},$$

откуда $U_1 = \mathcal{E}_1 - Ir_1 > U$, как это следует из сравнения полученного выражения для U_1 с выражением (3.2.21) для U при $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$.

Задача 3.19. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,2$ Ом заряжает аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,6$ Ом. Параллельно аккумулятору включена лампочка с сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите ток через аккумулятор и лампочку.

Задача легко решается с помощью законов Кирхгофа. Используя обозначенные на схеме токи, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными I , I_1 , I_2 :

$$I_1 = I_2 + I, \quad I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \quad I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1. \quad (3.2.22)$$

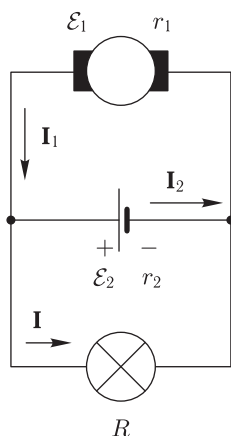


Рис. 3.19.

Решая эту систему, получаем для искомых величин:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R - \mathcal{E}_2 (r_1 + R)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = 1,58 \text{ A}, \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = 3,65 \text{ A}. \quad (3.2.23)$$

Задачу можно решить, не используя второго закона Кирхгофа, а составляя уравнения, соответствующие закону Ома для различных участков цепи. Обозначая через U напряжение на клеммах генератора, имеем:

- $U = IR$ — закон Ома для однородного участка цепи, содержащего лампочку;
- $U - \mathcal{E}_2 = I_2 r_2$ — закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащего аккумулятор;
- $U = \mathcal{E}_1 - I r_1$ — напряжение на клеммах работающего аккумулятора.

Дополнив эти уравнения равенством $I_1 = I_2 + I$ и комбинируя попарно написанные выражения, получим вторые два уравнения системы (3.2.22). Теперь можно найти и напряжение U на клеммах генератора.

Задача 3.20. Будет ли заряжаться аккумулятор, рассмотренный в предыдущей задаче, если сопротивление лампочки будет равно $R = 0,8 \text{ Ом}$?

С помощью первого из равенств (3.2.23) можно убедиться, что для I_2 при $R = 0,8 \text{ Ом}$ получается отрицательное значение. Это означает, что в действительности этот ток направлен в сторону, противоположную обозначенной на рисунке, и следовательно, аккумулятор не заряжается, а разряжается. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Ток через аккумулятор будет отсутствовать, если напряжение U на клеммах генератора (а значит, и на лампочке) равно ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}_2$. При этом аккумулятор можно отключить, и в оставшейся цепи ничего не изменится. В этом случае ток $I = I_1$, и его можно найти с помощью закона Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

С другой стороны, для I справедливо:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}_2}{R}.$$

Приравнявая правые части этих равенств, находим значение R , при котором ток через аккумулятор не идет:

$$R = r_1 \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}. \quad (3.2.24)$$

Теперь рассмотрим, как будет меняться напряжение на клеммах генератора при изменении сопротивления R (в отсутствие аккумулятора). При увеличении R напряжение на нем, равное напряжению на клеммах генератора $U = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1$, будет увеличиваться, так как ток в цепи уменьшается. Подключение аккумулятора приведет к его зарядке. Но при уменьшении R напряжение U станет меньше $\mathcal{E}_2$, и подключение аккумулятора приведет к его разрядке.

Если вместо аккумулятора имеется второй источник тока с такими же $\mathcal{E}_2$ и r_2 , то его подключение целесообразно, только если сопротивление нагрузки R меньше значения, даваемого формулой (3.2.24).

3.3. Работа и тепловое действие тока

Задача 3.21. При зарядке аккумулятора через него течет ток $I = 4$ А, а напряжение на его клеммах составляет $U = 12,6$ В. При разрядке аккумулятора током $I_1 = 6$ А напряжение на клеммах $U_1 = 11,1$ В. Каков ток короткого замыкания этого аккумулятора? Считать внутреннее сопротивление аккумулятора постоянным.

При зарядке аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}$ ток в цепи определяется соотношением

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{r}, \quad (3.3.1)$$

которое может быть получено либо с помощью закона Ома для неоднородного участка цепи, либо с помощью закона сохранения энергии (см. гл. 1, п. 1.3, задача 1.9). При разрядке аккумулятора через внешнюю цепь напряжение на его клеммах равно

$$U_1 = \mathcal{E} - I_1 r. \quad (3.3.2)$$

Ток короткого замыкания $I_0 = \mathcal{E}/r$ может быть найден в результате решения системы уравнений (3.3.1) и (3.3.2) относительно $\mathcal{E}$ и r . В результате получим

$$I_0 = \frac{UI_1 + U_1I}{U - U_1} = 80 \text{ А.}$$

Обратим еще раз внимание на то, что для решения этой задачи не обязательно «знать» выражения (3.3.1) и (3.3.2). Они могут быть получены в результате записи законов сохранения энергии для обоих рассматриваемых процессов.

При зарядке аккумулятора энергия зарядного устройства идет на увеличение энергии аккумулятора и выделение тепла внутри аккумулятора, а при работе аккумулятора запасенная в нем энергия расходуется на совершение работы во внешней цепи и также на выделение тепла внутри самого аккумулятора. Отнесенные к единице времени эти соотношения могут быть записаны через соответствующие мощности:

$$UI = I\mathcal{E} + I^2r, \quad (3.3.3)$$

$$I_1\mathcal{E} = I_1U_1 + I_1^2r. \quad (3.3.4)$$

Легко видеть, что уравнения (3.3.3) и (3.3.4) эквивалентны (3.3.1) и (3.3.2).

Задача 3.22. В батарее, состоящей из $n = 4$ последовательно соединенных одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением r , вследствие повреждения резко возросло внутреннее сопротивление одного из них. При этом оказалось, что количество теплоты, выделяемой на нагрузке с сопротивлением $R = 3r$, не изменяется при коротком замыкании поврежденного аккумулятора. Во сколько раз возросло внутреннее сопротивление поврежденного аккумулятора?

Из условия задачи следует, что закорачивание поврежденного аккумулятора не изменяет тока в цепи. Это возможно в том случае, когда ток короткого замыкания этого аккумулятора равен току в цепи в отсутствие аккумулятора. Поэтому имеем равенство

$$\frac{(n-1)\mathcal{E}}{(n-1)r + 3r} = \frac{\mathcal{E}}{r'}, \quad (3.3.5)$$

откуда при $n = 4$ получаем $r'/r = 2$.

Ответ можно получить более формальным образом, не конкретизируя значение сопротивления нагрузки R . При повреждении одного аккумулятора ток в цепи равен

$$I = \frac{(n-1)\mathcal{E}}{(n-1)r + r' + R}.$$

Если замкнуть поврежденный аккумулятор, то тот же ток (по условию задачи) будет равен

$$I = \frac{(n-1)\mathcal{E}}{(n-1)r + R}.$$

Приравняв правые части этих выражений, находим, что

$$r' - r = \frac{R}{(n-1)}. \quad (3.3.6)$$

При $R = 3r$ из (3.3.6) получим прежний результат $r'/r = 2$. Отметим, что соотношение (3.3.6) можно получить и из равенства (3.3.5), если в знаменателе левой части этого равенства заменить $3r$ на R .

Задача 3.23. *Электромотор подключен к сети постоянного тока с напряжением $U = 24$ В. Какова развиваемая мотором механическая мощность P_m , если по его обмоткам идет ток $I = 8$ А, а при затормаживании ротора ток в цепи равен $I_0 = 16$ А?*

По смыслу условия задачи в схеме электромотора нет никаких разветвлений, поэтому это электромотор серийного типа, или с независимым возбуждением (постоянный магнит), когда обмотки статора и ротора соединены последовательно, и по ним идет одинаковый ток. Механическая мощность мотора может быть представлена как разность между полной потребляемой мощностью и мощностью тепловых потерь в обмотках мотора с общим сопротивлением R :

$$P_m = IU - I^2 R = I(U - IR).$$

При полном затормаживании ротора мотора механическая мощность обращается в нуль, поэтому

$$I_0 U = I_0^2 R.$$

Отсюда для сопротивления обмоток получаем $R = U/I_0$, а выражение для механической мощности имеет вид

$$P_m = IU \left(1 - \frac{I}{I_0}\right).$$

Подставляя числовые данные, находим $P_m = 96$ Вт.

Обратим внимание, что механическая мощность мотора в общем случае может быть представлена как $P_m = I\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — ЭДС индукции, возникающая в обмотке мотора при вращении ротора, которая пропорциональна циклической частоте вращения ω : $P_m = kI\omega$. Поэтому эту задачу можно развить и, задав коэффициент пропорциональности k , дополнить условие задачи вопросом о циклической частоте вращения ротора, для которой справедливо выражение

$$\omega = \frac{1}{k} U \left(1 - \frac{I}{I_0}\right).$$

Задачу можно развить еще дальше, задав условие, что мотор работает без редуктора и поднимает груз массой m со скоростью v , наматывая трос на ось мотора. Тогда скорость подъема v равна произведению ω на радиус оси мотора R : $v = \omega R$. Теперь при известном R не нужно задавать коэффициент k для определения частоты вращения мотора, для которой оказывается справедливым выражение

$$\omega = \frac{IU}{mgR} \left(1 - \frac{I}{I_0}\right).$$

Задача 3.24. Какую максимальную механическую мощность P_m может развить серийный электромотор, включенный в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ В, если сопротивление обмоток мотора $R = 20$ Ом? Каков при этом коэффициент полезного действия мотора $\eta = \frac{P_m}{IU}$?

Преобразуем выражение для механической мощности, выделяя полный квадрат разности:

$$P_m = IU - I^2 R = - \left(I^2 R - IU + \frac{U^2}{4R} \right) + \frac{U^2}{4R} = -R \left(I - \frac{U}{2R} \right)^2 + \frac{U^2}{4R}.$$

Максимальная мощность мотора положительна (иначе он будет работать как генератор). Поэтому максимальная механическая мощность равна

$$P_{m \max} = \frac{U^2}{4R} = 180 \text{ В}$$

и реализуется она при условии $I = U/2R$.

Как мы видели в предыдущей задаче, для механической мощности мотора справедливо выражение

$$P_m = IU \left(1 - \frac{I}{I_0}\right),$$

где $I_0 = \frac{U}{R}$ — ток в заторможенном электромоторе. Поэтому для коэффициента полезного действия при максимальной механической мощности получаем выражение

$$\eta = \frac{P_{m \max}}{IU} = \left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = 0,5.$$

Задача 3.25. Генератор электрического тока включен в цепь, общее сопротивление которой равно R (включая сопротивление самого генератора). Механическая мощность, развиваемая для вращения генератора, равна P . Пренебрегая потерями, определите ЭДС генератора.

Электрическая мощность генератора равна произведению его ЭДС $\mathcal{E}$ на силу тока в цепи I :

$$P_{\text{эл}} = I\mathcal{E}.$$

На основании закона Ома ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (3.3.7)$$

поэтому электрическую мощность генератора можно переписать в виде

$$P_{\text{эл}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

В пренебрежении потерями, $P_{\text{эл}}$ равна механической мощности P устройства, вращающего генератор, поэтому

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R},$$

откуда

$$\mathcal{E} = \sqrt{PR}.$$

При решении задачи подразумевалось, что ток в цепи определяется соотношением (3.3.7), что верно, если в электрической цепи не действуют другие электродвижущие силы, например, в ней отсутствует заряжающийся аккумулятор. В противном случае выражение для тока в цепи запишем в виде

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_a}{R},$$

а ЭДС генератора $\mathcal{E}$ получим из квадратного уравнения:

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_a \mathcal{E} - PR = 0.$$

Задача 3.26. Плоский проволочный виток, имеющий площадь S и сопротивление R , находится в однородном магнитном поле с индукцией B , причем вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости витка. Магнитное поле исчезает с постоянной скоростью за время t . Какое количество теплоты выделится при этом процессе?

При равномерном выключении магнитного поля ЭДС индукции и индукционный ток в витке постоянны. Выражение для тока I имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BS}{Rt}.$$

Выделившееся за время t количество теплоты равно

$$Q = I^2 R t = \frac{(BS)^2}{Rt}. \quad (3.3.8)$$

Интересно отметить, что задачу можно решить и без использования закона Джоуля–Ленца, опираясь только на закон сохранения

энергии (см. гл. 1, п. 1.3, задача 1.12). Работа сторонних сил, приводящая к возникновению ЭДС индукции в витке, равна работе сил вихревого электрического поля по перемещению свободных зарядов в проволочном витке. Эта работа равна произведению ЭДС индукции $\mathcal{E} = BS/t$ на перемещенный заряд q . При равномерном изменении магнитного поля заряд q равен

$$q = It = \frac{\mathcal{E}}{R}t = \frac{BS}{R}.$$

Работа сторонних сил равна

$$A = \mathcal{E}q = \frac{(BS)^2}{R}.$$

В рассматриваемом процессе вся совершаемая работа реализуется в виде выделяющейся теплоты, поэтому получившееся соотношение точно соответствует выражению (3.3.8) для Q .

Задача 3.27. Во сколько раз нужно повысить напряжение на клеммах источника питания, чтобы снизить потери мощности в линии электропередачи в n раз при передаче той же мощности? До повышения напряжения на клеммах источника падение напряжения в линии передачи было равно $\Delta U = \alpha U$ ($\alpha < 1$), где U — напряжение на нагрузке.

Падение напряжения на линии передачи — это напряжение на сопротивлении проводов, так что если на нагрузке напряжение равнялось U , то на клеммах источника оно было равно

$$U + \Delta U = U(1 + \alpha). \quad (3.3.9)$$

Мощность, развиваемая на нагрузке, равна

$$P = IU = I_1 U_1, \quad (3.3.10)$$

где I — сила тока до повышения напряжения, а I_1 и U_1 — сила тока в цепи и напряжение на нагрузке после повышения напряжения на клеммах источника питания.

Условие равенства (3.3.10) выполняется при нормальной работе трансформатора, что означает определенные ограничения для подключаемой нагрузки.

Потери в линии передачи — это джоулево тепло, выделяющееся в проводах, поэтому по условию задачи справедливо равенство

$$I^2 R = n I_1^2 R,$$

где R — сопротивление проводов линии передачи.

Отсюда следует, что $I_1 = I/\sqrt{n}$, а напряжение на проводах (т. е. падение напряжения на линии передач) равно

$$\Delta U_1 = I_1 R = \frac{IR}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta U}{\sqrt{n}}. \quad (3.3.11)$$

Напряжение на клеммах источника питания теперь равно

$$U_1 + \Delta U_1 = \frac{UI}{I_1} + \frac{\Delta U}{\sqrt{n}} = U\sqrt{n} + \frac{\alpha U}{\sqrt{n}} = U \frac{n + \alpha}{\sqrt{n}}. \quad (3.3.12)$$

Здесь мы выразили U_1 с помощью (3.3.10) и воспользовались равенством (3.3.11) для ΔU_1 .

Для отношения $(U_1 + \Delta U_1)/(U + \Delta U)$ с помощью (3.3.9) и (3.3.12) получаем следующее выражение:

$$\frac{U_1 + \Delta U_1}{U + \Delta U} = \frac{n + \alpha}{(1 + \alpha)\sqrt{n}}.$$

Если напряжение на проводах составляло 10 % от напряжения на нагрузке, а потери необходимо снизить в 100 раз, то напряжение на клеммах источника питания нужно увеличить в 9,1 раза.

Задача 3.28. *Две электроплитки, включенные в цепь параллельно, потребляют мощность P . Одна из электроплиток потребляет мощность P_0 . Какую мощность потребляют две электроплитки, включенные в цепь последовательно?*

В данном случае для тепловой мощности удобно использовать выражение $P_Q = U^2/R$, поскольку по смыслу задачи электроплитка включается в цепь с заданным напряжением. При параллельном включении электроплиток мощность равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}, \quad (3.3.13)$$

где R_1 и R_2 — их сопротивления.

При включении одной (например, первой) электроплитки

$$P_0 = \frac{U^2}{R_1}. \quad (3.3.14)$$

При последовательном включении, очевидно,

$$P' = \frac{U^2}{R_1 + R_2}. \quad (3.3.15)$$

Выражая из первых двух равенств R_1 и R_2 и подставляя в выражение для P' получаем

$$P' = \frac{P_0}{P} (P - P_0). \quad (3.3.16)$$

Обратим внимание на то, что на первый взгляд равенства (3.3.13)–(3.3.15) образуют систему из трех уравнений с четырьмя

неизвестными — U , R_1 , R_2 и P' . Однако нетрудно видеть, что U в действительности не является неизвестной величиной: разделив числители и знаменатели правых частей этих равенств на U^2 , несложно убедиться, что кроме неизвестной величины P' , которую требуется определить по условию задачи, уравнения содержат лишь две дополнительные неизвестные величины R_1/U^2 и R_2/U^2 . Тогда сразу видно, что указанные равенства образуют систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

Полученный ответ удовлетворяет очевидному частному случаю, когда электроплитки одинаковы: $R_1 = R_2$. В этом случае $P_0 = P/2$, а $P' = P_0/2$. Именно такой результат получается из (3.3.16) для P' .

В условии данной задачи достаточно добавить одно слово, чтобы физическая модель рассматриваемого явления стала совершенно другой.

Задача 3.29. *Две одинаковые электроплитки, включенные в цепь параллельно, потребляют мощность P . При подключении одной из этих электроплиток к тому же источнику питания она потребляет мощность P_0 . Какую мощность потребляют две электроплитки, подключенные к этому источнику последовательно?*

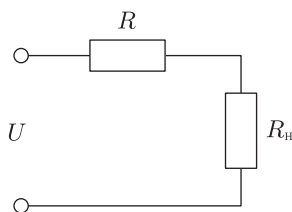


Рис. 3.29.

Теперь единственное предположение, которое делает возможным независимое задание обеих мощностей P и P_0 , заключается в том, что в электрической цепи, кроме электроплиток, присутствует еще какое-то сопротивление. Известно, что при включении нагрузки большой мощности напряжение в сети «садится», то есть уменьшается за счет того, что при большом токе в цепи увеличивается напряжение на подводящих

проводах. На схеме электрической цепи (рис. 3.29) U — напряжение на клеммах источника питания, R — сопротивление подводящих проводов, а R_n — сопротивление нагрузки: это $R_n/2$ при параллельном включении электроплиток, R_n при включении одной из электроплиток, $2R_n$ при их последовательном включении. Теперь выражения для потребляемой мощности имеют следующий вид:

$$P_0 = \frac{\left(U - \frac{UR}{R + R_n}\right)^2}{R_n}, \quad (3.3.17)$$

$$P = \frac{\left(U - \frac{UR}{R + R_n/2}\right)^2}{R_n/2}, \quad (3.3.18)$$

$$P' = \frac{\left(U - \frac{UR}{R + 2R_n}\right)^2}{2R_n}. \quad (3.3.19)$$

Обычно при большой нагрузке напряжение в сети уменьшается на несколько процентов, поскольку $R/R_n \ll 1$. Поэтому можно существенно упростить алгебраические выкладки, если ограничиться приближенным решением, удерживая в выражениях (3.3.17)–(3.3.19) только линейные по малому параметру $\alpha = R/R_0$ слагаемые. Тогда эти выражения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0 &\approx \frac{U^2}{R_n} \left(1 - \frac{R}{R_n}\right)^2 \approx \frac{U^2}{R_n} \left(1 - \frac{2R}{R_n}\right) = \frac{U^2}{R_n} (1 - 2\alpha), \\ P &\approx \frac{2U^2}{R_n} \left(1 - \frac{2R}{R_n}\right)^2 \approx \frac{2U^2}{R_n} \left(1 - \frac{4R}{R_n}\right) = \frac{2U^2}{R_n} (1 - 4\alpha), \\ P' &\approx \frac{U^2}{2R_n} \left(1 - \frac{R}{2R_n}\right)^2 \approx \frac{U^2}{2R_n} \left(1 - \frac{R}{R_n}\right) = \frac{U^2}{2R_n} (1 - \alpha). \end{aligned}$$

Поделив почленно второе из этих равенств на первое, определяем значение α :

$$\alpha = \frac{2P_0 - P}{4P_0}. \quad (3.3.20)$$

С помощью этого равенства и выражения для P_0 определяем величину U^2/R_n :

$$\frac{U^2}{R_n} = \frac{2P_0}{P}. \quad (3.3.21)$$

Теперь с помощью выражения для P_0 находим P' :

$$P' = \frac{P_0}{4P} (2P_0 + P). \quad (3.3.22)$$

Этот ответ удовлетворяет частному случаю $\alpha = R/R_n = 0$. При этом $P' = P_0/2$ и именно такое значение получается из (3.3.22) при $P = 2P_0$.

Отметим еще одно интересное обстоятельство, связанное с выполнением приближенных вычислений. При получении выражения (3.3.21) для $\frac{U^2}{R_n}$ использовалась формула

$$\frac{U^2}{R_n} = \frac{P_0}{1 - 2\alpha}, \quad (3.3.23)$$

в которую подставлялось значение α из (3.3.20). Но $\alpha \ll 1$, поэтому формула (3.3.23) с точностью до линейных по α членов будет иметь вид

$$\frac{U^2}{R_n} \approx P_0 (1 + 2\alpha).$$

Теперь при подстановке сюда α из (3.3.20) получим выражение

$$\frac{U^2}{R_{\text{п}}} = \frac{4P_0 - P}{2},$$

и мощность P' окажется равной

$$P' = \frac{(4P_0 - P)(2P_0 + P)}{16P_0}. \quad (3.3.24)$$

Эта формула отличается от (3.3.22). Однако, нетрудно видеть, что в частном случае $\alpha = 0$, когда $P = 2P_0$, формула (3.3.24) также приводит к правильному значению $P' = P_0/2$.

Обе формулы для P' (3.3.22) и (3.3.24) приводят к одинаковым значениям при малых, но конечных α (когда $R/R_{\text{п}} \ll 1$). Например, если взять $P = 1,8P_0$ (что соответствует значению $\alpha = 0,05$), то из обеих формул следует равенство $P' = 0,52P_0$ с точностью до третьей цифры после запятой.

Таким образом, при проведении приближенных вычислений разными способами (но с одинаковой степенью точности) могут получаться различные выражения, одинаково хорошо аппроксимирующие искомую величину в принятой степени точности.

3.4. Магнитное поле и электромагнитная индукция

Задача 3.30. Аккумулятор питает две одинаковые катушки электромагнита, показанного на рисунке. При каком соединении катушек — последовательном или параллельном — подъемная сила электромагнита будет больше и во сколько раз? Укажите, какие концы катушек при этом нужно соединить. Считать, что в не слишком сильных магнитных полях подъемная сила пропорциональна квадрату индукции магнитного поля.

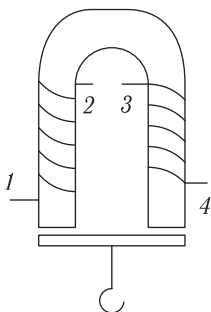


Рис. 3.30.

При параллельном соединении катушек сила тока в каждой из них будет в два раза больше, чем при последовательном соединении (если внутреннее сопротивление аккумулятора мало по сравнению с сопротивлением катушки). Соответственно в два раза вырастет и индукция магнитного поля, создаваемого катушкой. Так как подъемная сила электромагнита пропорциональна квадрату индукции магнитного поля, то при параллельном соединении катушек она будет в четыре раза больше, чем при последовательном соединении.

Катушки должны быть включены таким образом, чтобы у концов 1 и 4 были различные полюсы.

Для этого должны быть разные полюсы и у концов 2 и 3. Определяя положение северного и южного полюсов катушек с помощью правила правой руки, убеждаемся, что нужно соединить концы обмоток 1–3 и 2–4.

Задача 3.31. Баллистический гальванометр (который показывает прошедший через него заряд) включен в цепь катушки, надетой на замкнутый намагниченный сердечник (см. рис. 3.31). Железную пластину A , замыкающую намагниченный сердечник, быстро убирают, и при этом гальванометр показывает отклонение в 20 делений шкалы. Сопротивление катушки и гальванометра равно $R = 100$ Ом. Чувствительность шкалы гальванометра равна 10^{-8} Кл/дел. Как изменился магнитный поток Φ в сердечнике при удалении железной пластины?

При удалении пластины A происходит изменение магнитного потока, в результате чего в цепи гальванометра возникает ЭДС индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$. При этом в цепи идет ток, сила тока которого равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \Delta\Phi/\Delta t R.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R},$$

и учитывая, что произведение $I\Delta t$ равно заряду Δq , протекшему в цепи за время Δt , переписываем его еще раз следующим образом:

$$\Delta\Phi = R \cdot \Delta q.$$

Подставляя в это выражение приведенные в условии задачи числовые данные, найдем значение для изменения магнитного потока:

$$\Delta\Phi = 100 \text{ Ом} \cdot 10^{-8} \frac{\text{Кл}}{\text{дел}} \cdot 20 \text{ дел} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}.$$

Здесь мы учли, что протекший заряд Δq равен произведению чувствительности гальванометра на его показание.

Задача 3.32. Показанный на рисунке разборный школьный трансформатор включен в сеть, а к его вторичной обмотке подключена нагрузка. Опыт показывает, что при удалении верхней части сердечника, ток в первичной обмотке увеличивается,

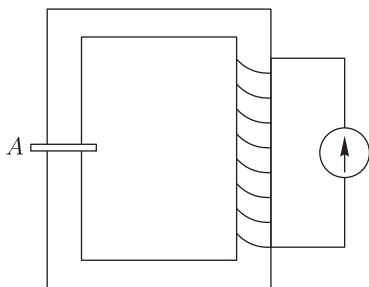


Рис. 3.31.

а во вторичной — уменьшается. Дайте качественное объяснение этому явлению.

При удалении верхней части сердечника уменьшается индуктивность первичной и вторичной обмоток трансформатора вследствие рассеяния магнитного потока, существовавшего в удаленной части сердечника. Это приводит к уменьшению ЭДС самоиндукции в первичной обмотке и ЭДС индукции во вторичной обмотке.

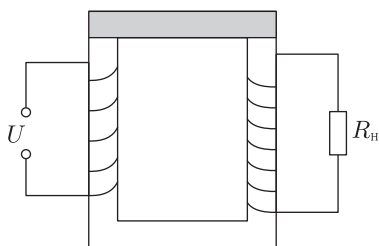


Рис. 3.32.

Так как появление ЭДС самоиндукции в цепи в соответствии с законом Ленца уменьшает значение тока, уменьшение величины ЭДС самоиндукции приводит к возрастанию тока в первичной обмотке.

Во вторичной обмотке само существование тока обязано ЭДС индукции в ней, поэтому уменьшение ЭДС приводит к уменьшению тока во вторичной обмотке.

Задача 3.33. *Электромотор включен в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ В. Полное сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Механическая мощность, развиваемая мотором равна $P_m = 160$ Вт. Какую ЭДС разовьет этот мотор, если его использовать как генератор с той же угловой скоростью, которую он имел, работая как электродвигатель?*

Электродвижущая сила самоиндукции, если устройство работает как электромотор, и ЭДС индукции, если оно работает как генератор, пропорциональны скорости изменения магнитного потока, то есть угловой скорости вращения ротора. Поэтому, если угловая скорость в обоих случаях одинакова, то одинаковыми будут и ЭДС.

Рассмотрим работу электромотора. Развиваемая электрическим током мощность, $P = IU$, реализуется как передаваемая приводу механическая мощность, $P_m = \mathcal{E}I$, и тепловые потери, $P_Q = I^2 R$,

$$IU = I\mathcal{E} + I^2 R, \quad (3.4.1)$$

откуда находим ЭДС:

$$\mathcal{E} = U - IR. \quad (3.4.2)$$

Поэтому задача сводится к нахождению электрического тока I в цепи электромотора.

Очевидно, что для нахождения $\mathcal{E}$ можно использовать и такое выражение:

$$\mathcal{E} = \frac{P_m}{I}, \quad (3.4.3)$$

но при этом опять возникает та же проблема нахождения тока в цепи.

Перепишем выражение (3.4.1) в виде

$$IU = P_{\text{м}} + I^2 R \quad (3.4.4)$$

и преобразуем следующее отсюда выражение для механической мощности, выделяя квадрат разности двух чисел:

$$P_{\text{м}} = UI - I^2 R = - \left(I\sqrt{R} - \frac{U}{2\sqrt{R}} \right)^2 + \frac{U^2}{4R}. \quad (3.4.5)$$

Видно, что максимальная механическая мощность получается при обращении в нуль выражения в скобках и равна

$$P_{\text{м max}} = \frac{U^2}{4R} = 180 \text{ Вт}.$$

Развиваемая мотором механическая мощность равна 160 Вт, то есть меньше максимальной мощности. Поэтому, как следует из (3.4.4) или (3.4.5), она может быть достигнута при двух разных значениях тока в цепи. Решая (3.4.4) как квадратное уравнение относительно I , получаем, что:

$$I = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4RP_{\text{м}}}}{2R}.$$

Подставляя сюда числовые данные условия задачи, получим $I_1 = 4 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$. Данные условия задачи не позволяют сделать однозначный вывод о том, какой ток идет в электромоторе. Обычно стараются выбрать такой режим работы мотора, чтобы тепловые потери были как можно меньше. Исходя из этого критерия, следует отдать предпочтение значению $I_2 = 2 \text{ А}$.

Очевидно, что угловая скорость вращения мотора, а, следовательно, и ЭДС самоиндукции будут разными при разных значениях тока. С помощью выражения (3.4.2) или, что более удобно, (3.4.3) находим: при $I_1 = 4 \text{ А}$, $\mathcal{E} = 40 \text{ В}$, при $I_2 = 2 \text{ А}$, $\mathcal{E} = 80 \text{ В}$. Во втором случае мотор вращается быстрее.

Задача 3.34. *Очень длинный соленоид S в средней части окружен кольцевым проводящим обручем, ось которого совпадает с осью соленоида. Обруч состоит из двух половин, имеющих разные неизвестные сопротивления R_1 и R_2 . К точкам A и B , в местах соединения половин обруча, подключены три одинаковых вольтметра с чисто активными очень большими сопротивлениями. Проводник $A - V_0 - B$ проложен вдоль диаметра обруча, а проводники $A - V_1 - B$ и $A - V_2 - B$ произвольно по разные стороны соленоида. По соленоиду пропускают ток, изменяющийся со временем по линейному закону. Оказалось, что при этом вольтметр V_0 показывает напряжение $U_0 = 5 \text{ В}$, а вольтметр V_1 показывает напряжение*

$U_1 = 10$ В. Определите показания вольтметра V_2 . Магнитным полем вне соленоида и индуктивностью проводов пренебречь. Сравните между собой сопротивления R_1 и R_2 .

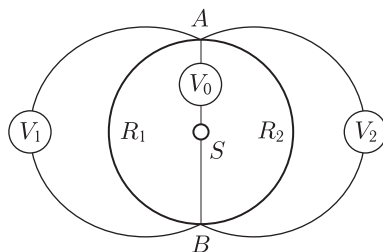


Рис. 3.34, а.

Мы приведем два решения задачи, одно с детальным рассмотрением различных возможных случаев, второе более краткое, но дающее те же ответы.

Условие задачи позволяет считать вольтметры идеальными. Это означает, что идущий через вольтметр ток I_V пренебрежимо мал по сравнению с током в кольце, и показываемое этим вольтметром напряжение $U_V = I_V R_V$, где R_V — очень большое сопротивление вольтметра.

Вольтметры со своими соединительными проводами, подключенные к точкам A и B кольца, образуют контуры, в которых возникает электромагнитная индукция. При этом показания вольтметров могут быть различными, как и в задано в условии задачи. Причина этого в том, что вольтметр со своими соединительными проводами не представляет собой однородного участка цепи: в проводах существует ЭДС, обусловленная электромагнитной индукцией. В задаче возможны два решения в зависимости от того, в каком направлении идет ток I_{V_0} через вольтметр V_0 .

Пусть ток I_{V_0} идет так, как показано на рисунке.

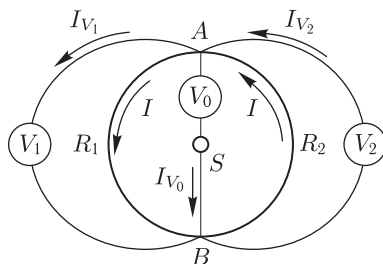


Рис. 3.34, б.

Будем считать, что в любом замкнутом контуре, охватывающем соленоид, ЭДС положительна, если контур обходится против часовой стрелки, и отрицательна, если по часовой. Обозначив направления токов I в обрубке и I_{V_1} и I_{V_2} через вольтметры V_1 и V_2 , как показано на рисунке, запишем уравнения, соответствующие второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что токи I_{V_0} , I_{V_1} и I_{V_2} пренебрежимо малы по сравнению с током I в обручке:

$$I(R_1 + R_2) = \mathcal{E}, \quad (3.4.6)$$

$$I_{V_1}R_V - IR_1 = 0, \quad (3.4.7)$$

$$I_{V_2}R_V + IR_1 = \mathcal{E}, \quad (3.4.8)$$

$$IR_1 - I_{V_0}R_V = \frac{\mathcal{E}}{2}. \quad (3.4.9)$$

В последнем уравнении учтено, что контур AR_1BV_0A охватывает половину магнитного потока, создаваемого соленоидом. Используя данные условия задачи, получаем:

$$U_1 = I_{V_1}R_V = IR_1 = 10 \text{ В}, \quad (3.4.10)$$

$$U_0 = I_{V_0}R_V = IR_1 - \frac{\mathcal{E}}{2} = 10 \text{ В} - \frac{\mathcal{E}}{2} = 5 \text{ В}, \quad (3.4.11)$$

$$U_2 = I_{V_2}R_V = \mathcal{E} - IR_1 = \mathcal{E} - 10 \text{ В}. \quad (3.4.12)$$

Из (3.4.11) получаем $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, теперь из (3.4.12) находим $U_2 = 0$, а из уравнения (3.4.6) следует, что $R_2 = 0$.

Последний результат можно получить и иначе, например, составив уравнение второго закона Кирхгофа для контура AR_2BV_2A :

$$I_{V_2}R_V - IR_2 = 0,$$

откуда

$$U_2 = I_{V_2}R_V = IR_2 = 0,$$

а следовательно и $R_2 = 0$.

Итак, возможное решение задачи: $U_2 = 0$, которое реализуется при $R_2 = 0$. При этом $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$.

Теперь предположим, что ток I_{V_0} идет в направлении, противоположном указанному на рисунке.

Составляем уравнения второго закона Кирхгофа:

$$I(R_1 + R_2) = \mathcal{E}, \quad (3.4.13)$$

$$I_{V_1}R_V - IR_1 = 0, \quad (3.4.14)$$

$$I_{V_2}R_V + IR_1 = \mathcal{E}, \quad (3.4.15)$$

$$IR_1 + I_{V_0}R_V = \frac{\mathcal{E}}{2}. \quad (3.4.16)$$

Опять, используя данные условия задачи, находим, что

$$U_1 = I_{V1}R_V = IR_V = 10 \text{ В}, \quad (3.4.17)$$

$$U_0 = I_{V0}R_V = \frac{\mathcal{E}}{2} - IR_1 = \frac{\mathcal{E}}{2} - 10 \text{ В} = 5 \text{ В}, \quad (3.4.18)$$

$$U_2 = I_{V2}R_V = \mathcal{E} - IR_1 = \mathcal{E} - 10 \text{ В}. \quad (3.4.19)$$

Из (3.4.19) получаем $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$; теперь из (3.4.18) находим $U_2 = 20 \text{ В}$. Из уравнения (3.4.13) следует, что $R_2 = 2R_1$.

Итак, другое возможное решение задачи: $U_2 = 20 \text{ В}$, которое реализуется при $R_2 = 2R_1$. При этом $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$.

Если не интересоваться значением сопротивления R_2 по сравнению с сопротивлением R_1 , то задачу можно решить проще, используя закон Ома для неоднородного участка цепи. Прежде всего отметим, что вольтметр V_0 показывает разность потенциалов φ_A и φ_B между точками A и B , поскольку на участке цепи AV_0B результирующая ЭДС индукции равна нулю. Пусть $\varphi_A > \varphi_B$, что соответствует первому разобранному случаю. Тогда

$$U_0 = \varphi_A - \varphi_B,$$

и закон Ома для неоднородного участка AV_1B имеет вид

$$I_{V1} = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V} = \frac{U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V},$$

или

$$I_{V1}R_V = U_1 = U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2} = 5 \text{ В} + \frac{\mathcal{E}}{2} = 10 \text{ В},$$

откуда $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$.

Закон Ома для неоднородного участка цепи AV_2B имеет вид

$$I_{V2} = \frac{\varphi_B - \varphi_A + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V} = \frac{-U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V},$$

откуда

$$U_2 = I_{V2}R_V = -U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2} = -5 \text{ В} + 5 \text{ В} = 0.$$

Если же $\varphi_A < \varphi_B$, что соответствует второму рассмотренному случаю, то $U_0 = \varphi_B - \varphi_A$, и для участка AV_1B

$$I_{V1} = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V} = \frac{-U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V},$$

или

$$I_{V1}R_V = U_1 = -U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2} = -5 \text{ В} + \frac{\mathcal{E}}{2} = 10 \text{ В}.$$

откуда $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$.

Для участка BV_2A в этом случае ток равен

$$I_{V2} = \frac{\varphi_B - \varphi_A + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V} = \frac{U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2}}{R_V},$$

откуда

$$U_2 = I_{V2} R_V = U_0 + \frac{\mathcal{E}}{2} = 5 \text{ В} + 15 \text{ В} = 20 \text{ В}.$$

Однако теперь для сравнения сопротивлений R_1 и R_2 все равно придется выписывать дополнительные уравнения для других участков цепи.

3.5. Переменный ток и электромагнитные колебания и волны

Задача 3.35. Переменное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$ подают на катушку индуктивности, обладающую индуктивностью L и активным сопротивлением R . Найти выделяющуюся в катушке мощность.

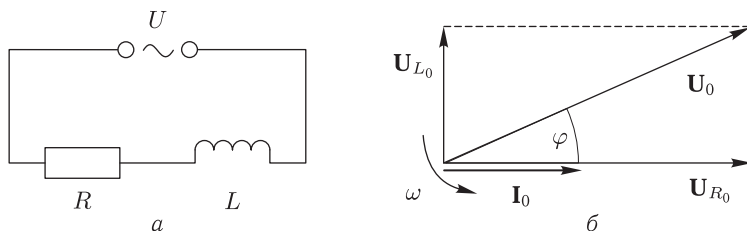


Рис. 3.35.

Эквивалентная электрическая схема показана на рис. 3.35, *а*. Векторная диаграмма для амплитудных значений тока и напряжений показана на рис. 3.35, *б*. Здесь U_0 — амплитудное значение напряжения на активном сопротивлении R : $U_0 = I_0 R$; U_{L0} — амплитудное значение напряжения на индуктивном сопротивлении катушки $U_{L0} = I_0 \omega L$.

Ток в цепи меняется по закону

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

С помощью векторной диаграммы находим $\operatorname{tg} \varphi$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L}{R}.$$

Амплитудное значение I_0 тока с помощью векторной диаграммы находим из соотношения

$$U_0^2 = U_{R0}^2 + U_{L0}^2 = I_0^2 R^2 + I_0^2 \omega^2 L^2,$$

откуда

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Разумеется, эти результаты могут быть получены с помощью представления сопротивления цепи комплексными числами:

$$Z = R + i\omega L, \quad I = \frac{U}{Z},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L}{R}, \quad I_0 = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Мгновенная мощность, выделяющаяся в катушке, равна

$$P = IU = \frac{U_0^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi).$$

Используя тригонометрическую формулу для произведения косинусов двух углов,

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)),$$

перепишем выражение для мощности:

$$P = \frac{U_0^2}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\cos \varphi + \cos (2\omega t - \varphi)). \quad (3.5.1)$$

Среднее по времени значение мощности за период T , т. е. за промежуток времени $t = T = 2\pi/\omega$, равно

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \varphi.$$

Величина $\bar{U}_0 = U_0/\sqrt{2}$ представляет собой действующее значение приложенного напряжения, а $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ — сопротивление последовательной цепи переменного тока, содержащей R и L :

$$|Z| = R_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Поэтому для $\langle P \rangle$ справедливо и такое соотношение:

$$\langle P \rangle = \frac{\bar{U}_0^2}{R_{RL}} \cos \varphi = \bar{U}_0 \bar{I}_0 \cos \varphi = \bar{I}_0^2 R_{RL} \cos \varphi,$$

где $\bar{I}_0^2 = \bar{U}_0^2/R_{RL}$ — действующее значение силы тока в цепи.

Этому выражению можно придать еще один вид, учитывая следующее равенство:

$$\begin{aligned} R_{RL} \cos \varphi &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \cos \varphi = R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} \cdot \cos \varphi = \\ &= R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \cos \varphi = R, \end{aligned}$$

так как

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

В результате среднее значение мощности равно

$$\langle P \rangle = \bar{I}_0^2 R.$$

Это выражение в точности соответствует закону Джоуля–Ленца. Результат физически совершенно понятен: мощность реализуется в виде выделяющегося тепла на активном сопротивлении цепи, в данном случае на активном сопротивлении катушки. Отметим, что это справедливо только для средней мощности, когда обращается в нуль вклад от второго слагаемого в правой части (3.5.1). В противном случае выделяющаяся мощность будет определять как необратимые тепловые потери в соответствии с законом Джоуля–Ленца, так и обратимые увеличение и уменьшение энергии магнитного поля в катушке в зависимости от периодического нарастания и убывания тока в цепи.

Задача 3.36. Покажите, что аналогичная ситуация имеет место и в том случае, когда в цепь переменного тока включены активное и емкостное сопротивления.

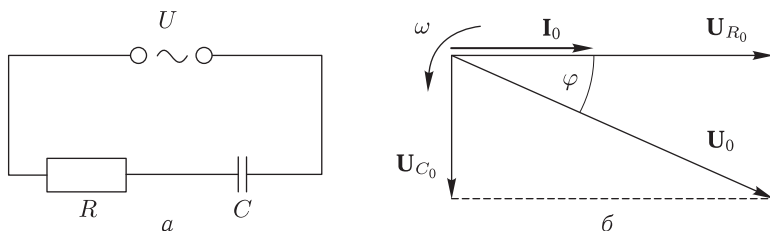


Рис. 3.36.

На рис. 3.36, а и 3.36. б показаны электрическая схема и векторная диаграмма для рассматриваемого случая, когда $U = U_0 \cos \omega t$, $I = I_0 \cos (\omega t - \varphi)$. Теперь ток опережает напряжение, поэтому угол φ в выражении для тока отрицательный. Для $\operatorname{tg} \varphi$ и I_0 с помощью

векторной диаграммы или представления с помощью комплексных чисел ($R \rightarrow R$, $R_C \rightarrow \frac{1}{i\omega C}$) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C R}, \quad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Для выделяющейся мгновенной мощности имеем

$$\begin{aligned} P = IU &= \frac{U_0^2}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_0^2}{2\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} (\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Отметим, что в первом слагаемом в правой части знак φ не играет роли, так как косинус — четная функция, а во втором слагаемом — играет роль, так как определяет фазу соответствующего вклада в развиваемую мгновенную (зависящую от времени) мощность.

Для средней мощности получаем:

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} \cos \varphi = \frac{\overline{U}_0^2}{R_{RC}} \cos \varphi = \overline{I}_0^2 R_{RC} \cos \varphi,$$

где

$$R_{RC} = \sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}};$$

остальные обозначения совпадают с введенными в предыдущей задаче. Теперь рассматриваем произведение

$$\begin{aligned} [R]_{RC} \cos \varphi &= \sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}} \cos \varphi = \\ &= R \sqrt{1 + (\omega C R)^{-2}} \cos \varphi = R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cos \varphi = R. \end{aligned}$$

Средняя мощность $\langle P \rangle$ равна

$$\langle P \rangle = \overline{I}_0^2 R.$$

Средняя мощность, как и в случае индуктивной нагрузки, характеризует необратимые тепловые потери в цепи. Второе слагаемое в выражении (3.5.2) для мгновенной мощности характеризует обратимые периодические возрастание и убывание энергии электрического поля в конденсаторе в зависимости от фазы тока в цепи.

Задача 3.37. Для измерения емкости конденсаторов используется мостовая схема на переменном токе (см. рис. 3.37), когда в два плеча включены конденсаторы вместо сопротивлений. Прикладывая переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$ между точками A и B ,

подбором сопротивлений добиваются, чтобы ток через гальванометр G был равен нулю. Чему при этом равна емкость C_x , если емкость второго конденсатора равна C ?

В случае постоянного тока вместо конденсаторов включены сопротивления R и неизвестное сопротивление R_x . Ток через гальванометр отсутствует, когда разность потенциалов между точками E и D равна нулю. При этом плечи моста, содержащие пары сопротивлений $R - R_x$ и $R_1 - R_2$ включены параллельно и условие отсутствия тока через G принимает вид

$$\frac{R}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда определяется неизвестное сопротивление R_x по известным R , R_1 и R_2 , которые подбираются так, чтобы ток обратился в нуль.

В случае переменного тока для сопротивлений конденсаторов можно использовать представление с помощью комплексных чисел:

$$R_C \rightarrow \frac{1}{i\omega C}, \quad R_{C_x} \rightarrow \frac{1}{i\omega C_x}.$$

Теперь условием отсутствия тока будет равенство

$$\frac{C_x}{C} = \frac{R_1}{R_2},$$

которое позволяет найти C_x после подбора сопротивлений R_1 и R_2 , обеспечивающих выполнение этого равенства. Обратим внимание на то, что условие отсутствия тока через гальванометр не зависит от частоты ω переменного тока.

Задача 3.38. Рассмотренный в предыдущей задаче мост можно использовать для измерения индуктивности, заменяя конденсаторы катушками индуктивности, индуктивность одной из которых неизвестна (см. рис. 3.38). Каковы теперь условия, позволяющие определить неизвестную индуктивность?

Принципиальное отличие от предыдущего случая заключается теперь

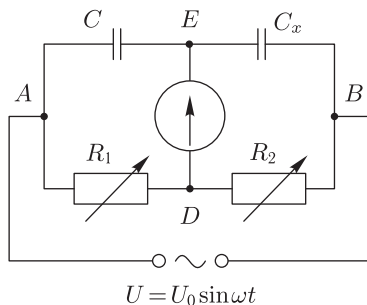


Рис. 3.37.

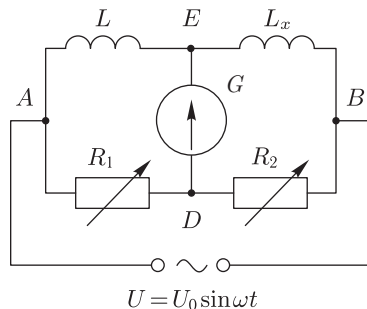


Рис. 3.38.

в том, что катушки обладают заметным активным сопротивлением. Поэтому, если в условии задачи не оговорено, что катушки идеальные, фактически в плечах, содержащих индуктивности, присутствуют сопротивления R и R_x , которые следует считать соединенными последовательно с индуктивностями, потому что через них идет одинаковый ток. В результате полные сопротивления катушек в представлении комплексными числами будут иметь вид

$$R + i\omega L \text{ и } R_x + i\omega L_x.$$

Условие отсутствия тока через гальванометра имеет вид

$$\frac{R + i\omega L}{R_x + i\omega L_x} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда следует, что

$$R + i\omega L = \frac{R_1}{R_2} (R_x + i\omega L_x).$$

Из условия равенства двух комплексных чисел получаем соотношения:

$$\frac{R}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{L}{L_x} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.5.3)$$

Первое из этих равенств представляет собой условие равновесия изображенного на рисунке моста в случае постоянного тока ($\omega = 0$), поскольку в этом случае индуктивные сопротивления катушек равны нулю. Видно, что знания значений R и R_x не требуется, нужно только, чтобы их отношение равнялось отношению R_1/R_2 . Тогда по известному соотношению R_1/R_2 и значению индуктивности L определяется значение L_x с помощью второго соотношения (3.5.3). Таким образом, подбирая значения активных сопротивлений так, чтобы мост был уравновешен и на постоянном, и на переменном токе, получаем возможность выразить индуктивность одной катушки через индуктивность другой.

Задача 3.39. На железный сердечник трансформатора, показанный на рисунке, намотаны две одинаковые обмотки. Магнитный поток делится поровну между разветвлениями сердечника. Чему будет равно напряжение на второй катушке при включении первой в сеть переменного тока с напряжением U ?

ЭДС самоиндукции, возникающая в первой обмотке, компенсирует подаваемое переменное напряжение U , если пренебречь активным сопротивлением этой обмотки. Через вторую обмотку в силу конструкции сердечника проходит в два раза меньший магнитный поток. Частота изменения магнитного потока в обеих обмотках одинакова, поэтому скорость изменения магнитного потока во второй обмотке будет в два раза меньше, чем ЭДС самоиндукции в первой обмотке. Поэтому и напряжение на клеммах разомкнутой второй обмотки будет равно $U/2$.

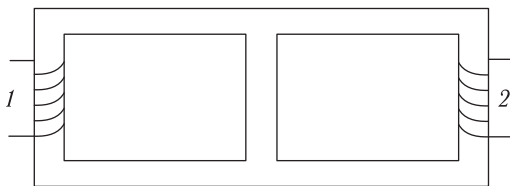


Рис. 3.39.

Эта задача может быть развита как в направлении задания разного числа витков в обмотках, так и подачи напряжения на первую или вторую обмотки. Решение таких задач основано на тех же соображениях, как и в рассмотренном простейшем случае.

Задача 3.40. Число витков во вторичной обмотке трансформатора в $n = 2$ раза больше числа витков в первичной обмотке. При включении первичной обмотки в сеть с напряжением $U_1 = 100$ В на концах разомкнутой вторичной обмотки существует напряжение $U_2 = 197$ В. Каким будет напряжение на концах разомкнутой вторичной обмотки, если использовать в трансформаторе сердечник того же размера, но из материала с магнитной проницаемостью в $k = 10$ раз меньшей, чем в первом случае?

В первом случае напряжение U_2 на концах разомкнутой вторичной обмотки меньше, чем $nU_1 = 100$ В. В пренебрежении рассеянием магнитного потока и токами Фуко в сердечнике это может быть вызвано падением напряжения на активном сопротивлении R первичной обмотки, в результате чего ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_1$ в этой обмотке оказывается меньше приложенного напряжения U_1 . Напряжение U_1 на концах первичной обмотки равно

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \quad (3.5.4)$$

По модулю напряжение U_L на индуктивном сопротивлении равно ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_1$ в первичной обмотке. Напряжение U_2 на концах разомкнутой вторичной обмотки равно возникающей в ней ЭДС индукции $\mathcal{E}_2$. Поскольку $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 = n$, то напряжение U_2 равно

$$U_2 = nU_L. \quad (3.5.5)$$

Из соотношения (3.5.4) следует, что

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}}. \quad (3.5.6)$$

Поэтому для U_2 с помощью (3.5.5) находим

$$U_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + \left(R/\omega L\right)^2}}.$$

При замене сердечника трансформатора индуктивное сопротивление первичной обмотки при неизменной частоте подаваемого напряжения уменьшается в k раз:

$$\frac{L}{L'} = k.$$

Следовательно, напряжение U'_2 на концах разомкнутой вторичной обмотки в этом случае будет равно

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + \left(R/\omega L'\right)^2}} = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + \left(kR/\omega L\right)^2}}. \quad (3.5.7)$$

Из соотношений (3.5.5) и (3.5.6) следует равенство

$$\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 = \left(\frac{U_1}{U_L}\right)^2 - 1 = \left(\frac{nU_1}{U_2}\right)^2 - 1.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.5.7), получаем

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + k^2 \left(n^2 \frac{U_1^2}{U_2^2} - 1\right)}}. \quad (3.5.8)$$

Подставляя сюда значения величин, приведенные в условии задачи, получаем $U'_2 = 100$ В — трансформатор вообще не повысил напряжение!

Полученный ответ удовлетворяет предельному случаю, когда активное сопротивление первичной обмотки пренебрежимо мало ($U_1 = U_L$) и сердечник не заменяется ($k = 1$). При этом из (3.5.8) имеем:

$$U'_2 = nU_L.$$

Задача 3.41. Радиолокационная станция работает на волне $\lambda = 15$ см в импульсном режиме, причем длительность импульса составляет $\tau = 2$ мкс, а частота следования импульсов равна $\nu = 4$ кГц. Какова наибольшая дальность обнаружения цели?

Наибольшая дальность S обнаружения цели определяется условием, что очередной импульс может излучаться только после возвращения отраженного от цели предыдущего импульса:

$$\Delta t > \frac{2S}{c},$$

где Δt — интервал между излучением импульсов, а c — скорость света. Величина Δt равна

$$\Delta t = \frac{1}{\nu},$$

поэтому для S получаем следующее условие:

$$S < \frac{c}{2\nu} = 37 \text{ км.}$$

Итак, в условии задачи приведены данные, которые не требуются для ответа на поставленный вопрос. С помощью этих данных можно определить некоторые другие характеристики радиолокационной станции. В частности, можно определить число колебаний n электромагнитного поля в одном импульсе.

Используя соотношение

$$\lambda = cT,$$

где T — период колебаний, для n получаем:

$$n = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau c}{\lambda} = 4 \cdot 10^3.$$

3.6. Заряженные частицы в электрических и магнитных полях

Задача 3.42. Из некоторой точки A между двумя закрепленными зарядами отпускают без начальной скорости частицу с зарядом e . За время t частица проходит расстояние AB . За какое время t' пройдет это же расстояние AB другая частица той же массы, но с зарядом Ze , если ее также отпустить в точке A ?



Рис. 3.42.

Частицы движутся в электрическом поле фиксированных зарядов, поэтому в любой точке траектории действующие на них силы направлены одинаково и различаются только по модулю (заряды обеих частиц одинакового знака). Одинаково будут направлены и ускорения частиц, что приведет к одинаковым траекториям движения. Поэтому при решении этой задачи можно использовать идеи физического подобия.

Совершим масштабное преобразование координат и времени, а также заряда частицы:

$$r' = \alpha r t' = \beta t e' = \gamma e.$$

Тогда выражения для энергии частицы,

$$E = \frac{mv^2}{2} + e\varphi,$$

можно сделать одинаковыми в обоих случаях, выбрав нужным образом коэффициенты α , β и γ :

$$E' = \frac{mv'^2}{2} + e'\varphi = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{mv^2}{2} + \gamma e\varphi.$$

При $\alpha^2/\beta^2 = \gamma$ это выражение можно понимать либо как энергию первой частицы в новой системе единиц измерения, либо как энергию второй частицы в прежней системе единиц. Поэтому

$$\beta = \frac{t'}{t} = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}.$$

По условию задачи $\gamma = 3$, а α следует положить равным единице, так как частицы в обоих случаях проходят одно и то же расстояние AB . В результате получаем, что

$$t' = \frac{t}{\sqrt{3}}.$$

Задачу можно было бы усложнить, заставив вторую частицу пройти в α раз больший путь, например, задав $\alpha = 4$. В этом случае для t' , казалось бы, получаем

$$t' = \frac{4t}{\sqrt{3}}.$$

Однако этот результат неверен. Дело в том, что увеличивая в α раз проходимый зарядом путь AB , мы увеличиваем и проходимую разность потенциалов, поэтому, совершая масштабное преобразование, нужно изменить и потенциал φ :

$$\varphi' = \alpha\varphi.$$

Теперь запишем выражение для E' :

$$E' = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{mv^2}{2} + \alpha\gamma e\varphi.$$

Системы будут физически подобны, если

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha\gamma,$$

и для t'/t находим

$$\beta = \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (3.6.1)$$

Результат можно проверить в простом частном случае, когда частицы движутся в заданном однородном электрическом поле напряженностью E . Тогда время полета первой частицы равно

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2Sm}{eE}}.$$

Составляя аналогичное выражение для t' при заданных значениях коэффициентов масштабного преобразования, приходим к тому же выражению (3.6.1).

Можно предложить и другое решение этой задачи, применяя принцип подобия к другой физической модели явления.

Уравнение движения частицы имеет вид

$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{E}}{m}, \quad (3.6.2)$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, создаваемого неподвижными зарядами.

Решение этого уравнения, а именно зависимость радиус-вектора частицы от времени $\mathbf{r}(t)$ однозначно определено при задании начальных условий:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.6.3)$$

Уравнение движения частицы с зарядом e' отличается лишь множителем в уравнении (3.6.2):

$$\mathbf{a} = \frac{e'\mathbf{E}}{m}.$$

Сделаем масштабное преобразование времени:

$$t' = \beta t.$$

После этого преобразования уравнение движение частицы и начальные условия принимают следующий вид:

$$\beta^2 \mathbf{a}' = \frac{e'\mathbf{E}}{m}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \beta \mathbf{v}' = \mathbf{v}_0.$$

или

$$\mathbf{a}' = \frac{e'\mathbf{E}}{\beta^2 m}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}_0}{\beta}. \quad (3.6.4)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (3.6.2) и (3.6.3) только обозначениями:

$$\frac{e'}{\beta^2} = e, \quad \mathbf{v}_0 = 0. \quad (3.6.5)$$

Второе из этих условий показывает, что движение при замене заряда частицы может быть идентичным движению исходной частицы только при нулевой начальной скорости. Первое из условий определяет коэффициент масштабного преобразования времени:

$$\beta = \sqrt{e'/e} = \sqrt{3}.$$

Идентичность уравнений (3.6.4) с уравнениями (3.6.2) и (3.6.3) при условиях (3.6.5) означает, что время движения от точки A до точки B

частицы с зарядом $3e$ в новом масштабе времени будет равно времени движения частицы с зарядом e в старом масштабе, т. е.

$$t'_{AB}(3e) = t_{AB}(e).$$

В прежнем масштабе времени время движения частицы с зарядом $3e$ уменьшится, а именно,

$$t_{AB}(3e) = \frac{1}{\beta} t'_{AB}(3e) = \frac{1}{\sqrt{3}} t_{AB}(e).$$

Таким образом, самое трудное при использовании методов физического подобия — это определение условий, при которых это физическое подобие реализуется. В качестве еще одного примера, иллюстрирующего тонкость этого момента, приведем задачу № 4.7.19 из книги [5].

Задача 3.43. Два заряда поместили на расстоянии l друг от друга и отпустили. Через время t_0 расстояние между ними удвоилось. Эти же заряды поместили на расстоянии $3l$ и отпустили. Через какое время расстояние между зарядами удвоится?

Будем для простоты считать, что заряды имеют одинаковую массу. Тогда в силу закона сохранения импульса скорости зарядов будут в любой момент времени равны по модулю и противоположны по направлению. В начальный момент времени энергия системы — это потенциальная энергия кулоновского взаимодействия зарядов, равная $k \frac{q_1 q_2}{l}$. На основании закона сохранения энергии по истечении времени t_0 справедливо соотношение

$$k \frac{q_1 q_2}{l} = k \frac{q_1 q_2}{2l} + mv^2,$$

или

$$mv^2 = k \frac{q_1 q_2}{2l}.$$

При помещении этих зарядов на расстояние l' друг от друга, получим аналогичное соотношение:

$$mv'^2 = k \frac{q_1 q_2}{2l'}.$$

Масштабное преобразование $l' = \alpha l$, $t' = \beta t$ позволяет сделать ситуации физически подобными, переписав последнее выражение в виде

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} mv^2 = \frac{k}{\alpha} \frac{q_1 q_2}{2l}$$

и выбрав условие $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha}$. По условию задачи $\alpha = 3$, поэтому получаем

$$\beta = \frac{t'}{t} = \alpha \sqrt{\alpha}, \quad \text{или} \quad \frac{t'}{t} = 3\sqrt{3}.$$

Задача 3.44. Определите отношение заряда к массе водородного иона $\frac{e}{m_H}$, используя законы электролиза. Постоянную Фарадея следует считать равной $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/кг.

Объединенная запись законов электролиза Фарадея имеет вид

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} q. \quad (3.6.6)$$

где m — масса выделившегося на электроде элемента, M — его молярная масса, а n — валентность. Используя представление о дискретности электрического заряда, можно подойти к законам электролиза следующим образом: при прохождении одного иона через раствор переносится масса m_H и заряд e , а при прохождении некоторого количества N ионов переносится масса m и заряд q . Очевидно, что справедливо равенство

$$\frac{m}{m_H} = \frac{q}{e},$$

откуда

$$m = \frac{m_H}{e} q. \quad (3.6.7)$$

Это равенство эквивалентно выражению (3.6.6), поэтому, приравнявая правые части, получим

$$\frac{e}{m_H} = \frac{Fn}{M}.$$

Подставляя сюда значения числа Фарадея, молярной массы водорода M и валентности $n = 1$, получаем

$$\frac{e}{m_H} = 9,65 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}.$$

Задача 3.45. Сколько времени длилось никелирование изделия, если на него осел слой никеля массой $m = 1,8$ г? Сила тока при никелировании была $I = 2$ А. Электрохимический эквивалент никеля (Ni^{2+}) $k = 3 \cdot 10^7$ кг/Кл. Можно ли решить задачу, не зная электрохимического эквивалента?

С помощью электрохимического эквивалента k первый закон электролиза Фарадея записывается в виде

$$m = kIt,$$

откуда

$$t = \frac{m}{kI} = 50 \text{ мин}.$$

Электрохимический эквивалент определяется соотношением

$$k = \frac{M}{N_A e n},$$

где M — молярная масса, N_A — число Авогадро, e — элементарный заряд, n — валентность иона. Поэтому для решения задачи без знания

электрохимического эквивалента требуется знание валентности никеля. Для времени никелирования в этом случае получаем

$$t = \frac{mN_A en}{MI}.$$

Задача 3.46. При электролитическом получении алюминия используются ванны, работающие при силе тока $I = 40$ кА под напряжением $U = 5$ В. Сколько электроэнергии требуется для получения $m = 1$ кг алюминия? Валентность катиона алюминия $n = 3$.

Если пренебречь потерями, то можно считать, что вся развиваемая в цепи мощность идет на реализацию процесса электролиза, поэтому количество потребляемой энергии дается выражением

$$W = UIt.$$

Время электролиза можно найти, используя результаты решения предыдущей задачи,

$$t = \frac{mN_A en}{MI}.$$

Теперь для W получаем выражение

$$W = \frac{UmN_A en}{M} = 53,3 \text{ МДж} = 15 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Интересно отметить, что ответ не зависит от силы тока в цепи. Так происходит потому, что количество потребляемой энергии пропорционально току и времени работы, которое, однако, обратно пропорционально току.

Задача 3.47. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B по винтовой линии с радиусом R и шагом h . Определите скорость электрона.

Когда электрон попадает в однородное магнитное поле, двигаясь под углом α к направлению индукции поля, то составляющая скорости $v_n = v \cos \alpha$, параллельная вектору магнитной индукции, не изменяет своего значения. За счет перпендикулярной составляющей скорости $v_{\perp} = v \sin \alpha$ электрон начинает двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, поскольку на него действует сила Лоренца со стороны магнитного поля. В результате электрон движется в пространстве по винтовой линии — это равномерное перемещение вдоль индукции поля и равномерное вращение в перпендикулярной плоскости.

На основании второго закона Ньютона справедливо равенство

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = ev_{\perp} B,$$

откуда перпендикулярная составляющая скорости равна

$$v_{\perp} = \frac{eBR}{m},$$

ее можно записать также в виде $v_{\perp} = \omega R = 2\pi R/T$, где T — период обращения. Теперь можно найти и продольную составляющую скорости

$$v_{\parallel} = \frac{h}{T} = \frac{heB}{2\pi m}.$$

Модуль полной скорости $v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$ с помощью найденных выражений для $v_{\perp}$ и $v_{\parallel}$ записывается в виде

$$v = \frac{eB}{2\pi m} \sqrt{4\pi R^2 + h^2}.$$

Обратим внимание на то, что период обращения $T = 2\pi m/eB$ не зависит от перпендикулярной составляющей скорости, то есть от угла α , под которым электрон влетает в магнитное поле. Это свойство является основой работы одного из типов ускорителей заряженных частиц — циклотронов.

Задача 3.48. Определите индукцию магнитного поля в циклотроне, разгоняющем протоны до энергии $W = 4$ МэВ, если максимальный радиус полуокружности внутри дуанта $R = 60$ см.

Для ответа на вопрос задачи не нужно знать деталей устройства разгоняющей части циклотрона. При нерелятивистских скоростях движения, которым соответствует энергия в 4 МэВ, скорость движения протона равна

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

При такой скорости протон должен уместиться на круговой орбите радиусом R , поэтому на основании второго закона Ньютона имеем

$$\frac{mv^2}{R} = eBv,$$

откуда

$$B = \frac{mv}{eR} = \frac{\sqrt{2Wm}}{eR}. \quad (3.6.8)$$

Подставляя сюда приведенные в условии задачи значения величин после перевода их в систему единиц СИ, получаем $B = 0,48$ Тл.

Если задать размер d промежутка между дуантами циклотрона и напряжение между ними U , то в предположении однородности поля между дуантами легко рассчитать промежуток времени, в течение которого первоначально неподвижный протон достигает указанной энергии.

При каждом проходе между дуантами протон приобретает энергию $\Delta W = eU$. Поэтому число проходов n между дуантами будет

$$n = \frac{W}{\Delta W} = \frac{W}{eU}.$$

Протон проходит дуанты дважды за каждый оборот. Поэтому время его обращения t_1 определяется соотношением

$$t_1 = \frac{T}{2}n = \frac{\pi m}{eB} \frac{W}{eU}.$$

Подставляя сюда значение B из (3.6.8), получим, что

$$t_1 = \frac{\pi R \sqrt{2Wm}}{2Ue}.$$

Время t_2 движения протона между дуантами легко найти, если учесть, что каждый раз протон подходит к дуантам с той же скоростью, с которой он вышел из них в предыдущий раз, так как при движении по окружности модуль его скорости не изменяется. Поскольку между дуантами протон проходит n раз, то время t_2 при движении в однородном поле с постоянным ускорением определяется из уравнения

$$nd = \frac{at^2}{2} = \frac{Ue}{2dm} t^2.$$

Полное время t разгона протона в циклотроне равно сумме t_1 и t_2 :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{2Wm}}{2Ue} (\pi R + 2d).$$

Если ускоряющее напряжение $U = 20\,000$ В, а расстояние между дуантами $d = 1$ см, то $t = 1,4 \cdot 10^{-5}$ с. Отметим, что время движения между дуантами составляет всего один процент от времени обращения протона в магнитном поле:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2d}{\pi R} = 0,01.$$

И это соотношение зависит только от геометрии циклотрона.

Задача 3.49. Две частицы с массами m и M и разноименными электрическими зарядами движутся по окружностям на неизменном расстоянии друг от друга. Скорость частицы с массой m мгновенно увеличивается в n раз, не изменяясь по направлению. При каком минимальном n частицы разлетятся на бесконечное расстояние друг от друга?

Эта задача аналогична задачам из раздела «Механика», но, в отличие от них, здесь частицы движутся вокруг центра масс, и поэтому непосредственно использовать результаты, полученные для случая обращения одного тела вокруг другого, которое считается неподвижным, нельзя. Однако задачу о движении двух взаимодействующих тел всегда

можно свести к задаче одного тела. Для этого поступим следующим образом. Обозначим через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ радиус-векторы частиц, поместив начало отсчета в центр масс системы рассматриваемых частиц. Тогда

$$m\mathbf{r} + M\mathbf{R} = 0. \quad (3.6.9)$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае система отсчета, связанная с центром масс, неподвижна относительно лабораторной системы отсчета, а следовательно, является инерциальной. Введем относительный радиус-вектор $\mathbf{\rho}$:

$$\mathbf{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \quad (3.6.10)$$

Из соотношений (3.6.9) и (3.6.10) получим

$$\mathbf{r} = \frac{M}{M+m}\mathbf{\rho}, \quad \mathbf{R} = -\frac{m}{M+m}\mathbf{\rho}. \quad (3.6.11)$$

Таковыми же соотношениями связаны скорости движения частиц $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ со скоростью $\mathbf{u}$, характеризующей изменение во времени вектора $\mathbf{\rho}$:

$$\mathbf{v} = \frac{M}{M+m}\mathbf{u}, \quad \mathbf{V} = -\frac{m}{m+M}\mathbf{u}. \quad (3.6.12)$$

С помощью введенных величин получаем следующее выражение для кинетической энергии частиц:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mM}{M+m} \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Этот результат позволяет предположить, что вместо движения двух рассматриваемых частиц можно рассматривать движение одного тела с массой $\mu = \frac{mM}{M+m}$ (называемой приведенной массой системы частиц) со скоростью $\mathbf{u}$, причем скорости частиц $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ получаются из $\mathbf{u}$ с помощью соотношений (3.6.12). Действительно, частицы движутся по окружностям вокруг центра масс с радиусами r и R , причем на основании второго закона Ньютона, например, для частицы массой m справедливо

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{q_1 q_2}{(r+R)^2},$$

где q_1 и q_2 — модули электрических зарядов частиц. Выражая в этом равенстве r , v и R с помощью введенных соотношений для ρ и u , получаем

$$\frac{mM}{M+m} \cdot \frac{u^2}{\rho} = k \frac{q_1 q_2}{\rho^2}.$$

Это соотношение соответствует второму закону Ньютона для частицы с массой μ , движущейся по окружности радиусом ρ вокруг силового центра, сила взаимодействия с которым обратно пропорциональна квадрату расстояния ρ до этого силового центра.

Теперь задача стала совершенно аналогичной соответствующей механической задаче, например, задаче о движении спутника вокруг Земли с той только разницей, что интенсивность взаимодействия с силовым центром определяется не гравитационными, а электростатическими силами, но с той же зависимостью от расстояния. Для того, чтобы тело, вращавшееся по круговой орбите вокруг силового центра, удалилось от него на бесконечность, скорость u тела нужно увеличить по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз (вспомните соотношение между первой и второй космическими скоростями). Из соотношения (3.6.9) при этом следует, что скорость частицы v в системе отсчета, связанной с центром масс, также следует увеличить в $\sqrt{2}$ раз: $v' \geq \sqrt{2}v$.

Но после того, как скорость частицы с массой m в лабораторной системе отсчета увеличили в n раз, система отсчета, связанная с центром масс, в лабораторной системе отсчета также пришла в движение со скоростью $\mathbf{V}'$, определяемой соотношением:

$$\mathbf{V}' = \frac{mn\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{M + m}.$$

Скорость $\mathbf{v}'$ частицы с массой m в движущейся со скоростью $\mathbf{V}'$ системе отсчета равна

$$\mathbf{v}' = n\mathbf{v} - \mathbf{V}' = \frac{Mn\mathbf{v} - M\mathbf{V}}{M + m}. \quad (3.6.13)$$

Учитывая, что скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ антипараллельны, для модуля v' получаем с помощью (3.6.9) соотношением

$$v' = \frac{Mn + m}{M + m} \geq \sqrt{2}v.$$

Вводя обозначение $\gamma = m/M$, получаем отсюда следующее неравенство для n :

$$n \geq \sqrt{2}(\gamma + 1) - \gamma.$$

Полученный ответ удовлетворяет очевидному предельному случаю: при $\gamma > 0$, что соответствует обращению легкой частицы вокруг неподвижной тяжелой, для n получаем неравенство $n \geq \sqrt{2}$.

В заключение еще раз обратим внимание на принятую схему рассуждений. Сначала задача двух тел сводится к задаче о движении одного тела. Делается это путем перехода в систему отсчета, связанную с центром масс частиц. Эта система отсчета вначале неподвижна относительно лабораторной системы отсчета, поэтому скорости v и V частиц одинаковы в обеих системах. Для удаления на бесконечность скорость v в системе центра масс, как мы видели, следует увеличить в $\sqrt{2}$. В лабораторной системе отсчета этому соответствует увеличение скорости v в n раз. Поскольку при таком увеличении скорости одной частицы система центра масс приходит в движение, то для нахождения

скорости этой частицы в системе центра масс нужно вычесть из скорости в лабораторной системе скорость самой системы центра масс (см. (3.6.13)). После этого останется только приравнять скорость частицы в системе центра масс, полученные при разных способах рассуждений. При этом важно понимать, что скорость частицы в системе отсчета, связанной с центром масс, не зависит от равномерного движения этой системы отсчета.

3.7. Волновая и геометрическая оптика

При решении задач данного раздела важно четко понимать, что понятие световых лучей в математическом смысле соответствует приближенному решению волнового уравнения (так называемое приближение эйконала). Поэтому геометрическая оптика является предельным случаем волновой, а правильная методологическая установка соответствует такой методике решения задач, при которой представления волновой оптики не противопоставляются представлениям геометрической оптики, но служат определенным способом контроля справедливости последней в конкретных условиях. Это очень четко иллюстрируется на примере следующей простейшей задачи.

Задача 3.50. *Плоская граница раздела проходит между воздухом и средой, показатель преломления n которой плавно и монотонно изменяется вдоль границы раздела. Как будет распространяться в среде свет, падающий из воздуха нормально границе раздела?*

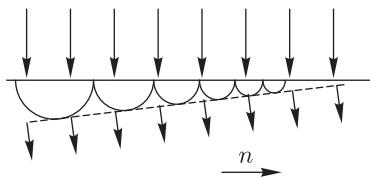


Рис. 3.50.

На рисунке стрелкой обозначено направление, вдоль которого увеличивается показатель преломления среды n . По законам геометрической оптики свет, падающий перпендикулярно границе раздела, должен идти дальше, не преломляясь. Однако, проводя построение фронта волны с помощью принципа Гюйгенса, сразу убеждаемся, что свет будет постепенно поворачивать в сторону возрастания коэффициента преломления.

В некоторых случаях, напротив, иногда возникает подозрение о проявлении волновых свойств, в то время как в действительности

рассматриваемое явление получает строгое адекватное объяснение в рамках представлений геометрической оптики. Представления волновой оптики в этих случаях используют только для проверки правильности полученного результата или для выбора модели (волновой или геометрической) в самом начале решения.

Задача 3.51. *Светлое пятно от солнечного зайчика, полученное с помощью плоского зеркала прямоугольной формы, повторяет форму зеркала на близко расположенной стене и имеет эллиптическую форму на стене, расположенной далеко от зеркала. Объясните это явление.*

При решении этой задачи часто возникает аналогия с наблюдаемым в обычной жизни явлением: светлые солнечные пятна на земле от лучей света, прошедших сквозь листву деревьев с резной формой листа, например клена, имеют округлую форму. Это наводит на мысль о роли волновых явлений, в частности, о дифракции света на преграде на его пути. Между тем, элементарная оценка показывает возможность объяснения явления на основе представлений о прямолинейном распространении лучей света. Действительно, угол φ дифракционного отклонения света от прямолинейного распространения по порядку величины равен отношению длины световой волны λ к размеру отверстия (или преграды) d :

$$\varphi = \frac{\lambda}{d}. \quad (3.7.1)$$

Эту величину нужно сравнить с углом отклонения света, найденным в приближении геометрической оптики. В рассматриваемом явлении в лучевом приближении размывание границы пятна (или тени) на стене происходит вследствие конечности углового диаметра d Солнца для наблюдателя на Земле, который составляет $\alpha = 0,01$ рад. Дифракционные эффекты не влияют на форму освещенного пятна, если угол φ в (3.7.1) мал по сравнению с угловым размером Солнца:

$$\frac{\lambda}{d} \ll \alpha. \quad (3.7.2)$$

Выбирая $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м и учитывая величину α , находим, что дифракционные эффекты несущественны, если диаметр отверстия (или зеркала) d не меньше, чем $5 \cdot 10^{-7}$ м. В этом случае применима геометрическая оптика, в рамках представлений которой свет на стене дает изображение отверстия (зеркала), когда стена находится близко, и дает изображение Солнца, когда стена расположена далеко.

В первом случае, когда стена расположена близко, Солнце в первом приближении можно считать точечным источником света. Освещенное пятно — это центральная проекция отверстия на стену. Центр проекции (Солнце) расположено на расстоянии $1,5 \cdot 10^8$ км, поэтому

все лучи, приходящие от него в отверстие, практически параллельны между собой. Если при этом плоскости экрана с отверстием и стены параллельны, то форма и размер освещенного пятна d_1 совпадают с формой и размером отверстия d , $d_1 = d$. Но из-за конечности углового диаметра Солнца края изображения все-таки будут слегка размытыми. Все сказанное справедливо, когда ширина полутени из-за размытости

$$d' = \alpha L,$$

где L — расстояние от отверстия до стены, будет мала по сравнению с размером отверстия:

$$d' = \alpha L \ll d. \quad (3.7.3)$$

При $\alpha \approx 0,01$ и $d = 10$ см получим, что $L \ll 10$ м.

Во втором случае, когда стена далеко от отверстия, в первом приближении отверстие можно считать точечным. Освещенное пятно на стене в этом случае — это изображение Солнца (как в случае камеры-обскуры), то есть круг с диаметром

$$d_2 = \alpha L,$$

если стена перпендикулярна солнечным лучам. При наклонном падении круг превращается в эллипс. С увеличением размера отверстия (или при приближении отверстия к стене, на которой наблюдается светлое пятно) освещенность пятна возрастает, но его края становятся более размытыми.

Это размытие по порядку величины равно размеру отверстия d . Таким образом, пятно имеет описанную форму, если

$$d \ll d' = \alpha L, \quad (3.7.4)$$

что при указанных выше значениях параметров дает $L \gg 10$ м.

Из полученных результатов следует, что существует безразмерный параметр Γ , определяющий форму освещенного пятна на стене. Это

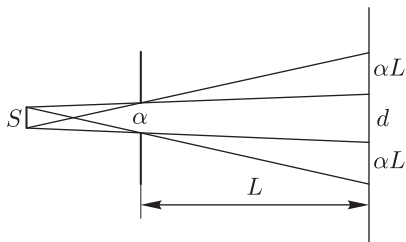


Рис. 3.51.

отношение углового размера Солнца α к угловому размеру зеркала (или отверстия) ε , т. е. к углу d/L , под которым оно видно от стены:

$$\Gamma = \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\alpha L}{d}. \quad (3.7.5)$$

На рис. 3.51 показаны фигурирующие в решении задачи величины.

В некоторых случаях оценка роли дифракционных эффектов оказывается более сложной и не может быть ограничена только использованием соотношения (3.7.1).

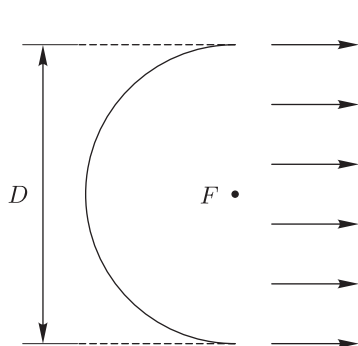


Рис. 3.52.

Задача 3.52. Луч прожектора, выполненного в виде сферического зеркала, и источника света, помещенного в фокусе зеркала, тем толще, чем больше размер зеркала D . Если же в фокусе зеркала F с диаметром $D = 1$ м поместить излучатель сантиметровых радиоволн ($\lambda = 1$ см), то направленность такого радиопрожектора оказывается тем острее, чем больше D . Между тем в обоих случаях параметр λ/D , определяющий применимость

геометрической оптики, много меньше единицы и ситуация формально выглядит одинаковой. Объяснить возникающее противоречие.

Ситуация может быть объяснена, например, с помощью метода зон Френеля для объяснения дифракционных явлений. Параметр λ/D определяет принципиальную необходимость выхода за рамки геометрической оптики в случаях, когда он не мал. В случае

$$\lambda/D \ll 1,$$

вообще говоря, необходимо более аккуратное исследование. Так, в общем случае параметром, определяющим условие применимости геометрической оптики, является величина $\sqrt{\lambda r}/D$, где r — расстояние от точки наблюдения. При

$$\frac{\sqrt{\lambda r}}{D} < 1 \quad (3.7.6)$$

дифракционными эффектами можно пренебречь. В оптической области, где $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ м, условие (3.7.6) оказывается выполненным вплоть до расстояний $r \approx 10^4$ м, то есть во всей области использования прожекторов. Очевидно, что для много меньших расстояний, как в предыдущей задаче, это условие всегда выполнено и при оценках можно использовать условие (3.7.1). В рассматриваемом случае радиопрожектора

условие (3.7.6) оказывается нарушенным уже при $r \approx 10^3$ м. Поэтому на расстоянии в 1 км от радиопрожектора будет наблюдаться не однородное световое пятно, а дифракционная картина Фраунгофера.

Решение задач в приближении геометрической оптики, как правило, связано с применением законов отражения и преломления света, с геометрическим построением хода лучей и с использованием формул для тонкой линзы и сферического зеркала. Фактически решение таких задач требует последовательного применения определенных сведений из геометрии и тригонометрии. При этом важно для упрощения часто громоздких преобразований стараться использовать общие физические принципы, такие как соображения симметрии, обратимости хода лучей и т. д.

Задача 3.53. На поверхности водоема глубиной H плавает круглый плот радиусом r . Над центром плота на некоторой высоте h расположен точечный источник света. Определите зависимость радиуса тени на дне водоема R от высоты h . При какой высоте h радиус R имеет максимальное значение? Показатель преломления воды равен n .

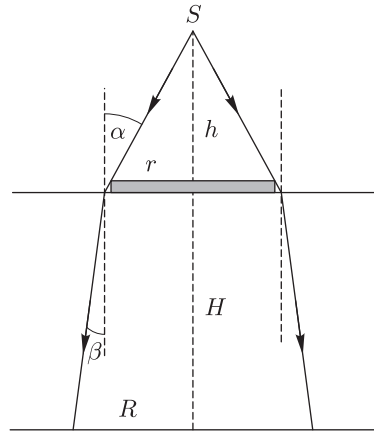


Рис. 3.53.

На рис. 3.53 показан ход лучей света, образующих тень на дне водоема. Из рисунка сразу видно, что максимальный размер тени $R_{\max}$ реализуется, когда источник света S расположен на плоту при $h = 0$. При этом угол падения $\alpha_0 = \pi/2$, и угол преломления β_0 соответствует полному внутреннему отражению. Таким образом, в этом случае оказывается, что

$$\frac{1}{\sin \beta_0} = n,$$

$$\begin{aligned} R_{\max} &= r + H \cdot \operatorname{tg} \beta_0 = r + H \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} = \\ &= r + H \frac{1/n}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = r + H \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Определение максимального радиуса тени оказалось проще, чем исследование случая при произвольной высоте h , благодаря физическим

соображениям относительно хода лучей. Нахождение зависимости $R(h)$ требует проведения простых, но довольно громоздких преобразований. При этом уже найденное значение $R_{\max}$ можно использовать для проверки правильности получаемого результата.

В общем случае

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{h}, \quad (3.7.8)$$

$$R = r + H \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3.7.9)$$

Находим выражение для $\operatorname{tg} \beta$ с помощью (3.7.8):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Теперь нужно выразить $\sin \alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}.$$

Здесь мы воспользовались тригонометрическим тождеством:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Используя для $\operatorname{tg} \alpha$ выражение (3.7.8), для $\operatorname{tg} \beta$ получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{h \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot \sqrt{n^2 - \frac{r^2}{h^2 (1 + r^2/h^2)}}} = \frac{r}{\sqrt{h^2 n^2 + r^2 (n^2 - 1)}}.$$

Подставляя это выражение в (3.7.9), получаем

$$R = r \left(1 + \frac{H}{\sqrt{h^2 n^2 + r^2 (n^2 - 1)}} \right). \quad (3.7.10)$$

Видно, что максимальное значение R действительно реализуется при $h = 0$ и совпадает с найденным в (3.7.7).

Задача 3.54. Призма с преломляющим углом $\varphi = 60^\circ$ сделана из стекла с показателем преломления $n = 1,75$. При каком угле α падения луча на одну из граней призмы выход луча из второй грани становится невозможным?

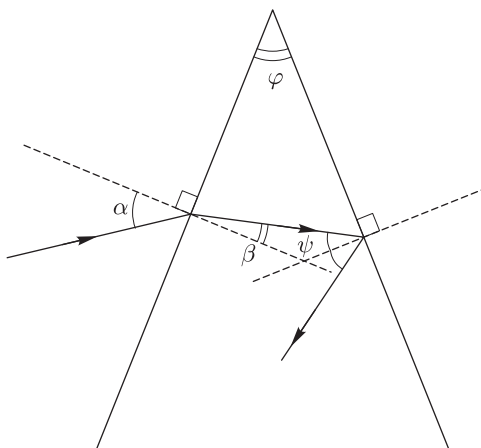


Рис. 3.54.

Выход луча из второй грани призмы невозможен, если угол падения луча на нее внутри призмы ψ равен или больше угла полного внутреннего отражения, то есть при условии

$$\frac{1}{\sin \psi} = n. \quad (3.7.11)$$

Углы падения α и преломления β для луча, падающего на переднюю грань, связаны законом преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Из геометрических соображений видно, что

$$\varphi = \beta + \psi, \quad (3.7.12)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= n \sin \beta = n \sin (\varphi - \psi) = n \sin \varphi \cos \psi - n \cos \varphi \sin \psi = \\ &= n \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \psi} - n \cos \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Учитывая условие (3.7.11), получаем

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sqrt{n^2 - 1} - \cos \varphi.$$

Подставляя сюда заданные значения φ и n , получаем $\sin \alpha = 0,7435$, откуда предельный угол

$$\alpha \leq 48^\circ.$$

Обратим внимание, что ключевыми моментами при решении этой задачи являются установление соотношения (3.7.11), определяющего

условие достижения нужного результата, и соотношения (3.7.12), определяющего геометрические закономерности явления.

Проще всего убедиться в справедливости равенства (3.7.12), опустив перпендикуляр из вершины угла φ на луч, проходящий между гранями призмы. При этом угол φ разбивается на два угла, которые равны, соответственно, углам β и ψ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

В некоторых задачах требуется исследовать экстремумы определяющих величин. Здесь возможно использование различных методов элементарной математики.

Задача 3.55. *На каком расстоянии от тонкой собирающей линзы следует поместить предмет, чтобы расстояние от предмета до его действительного изображения было наименьшим?*

Решение задачи основывается на использовании формулы тонкой линзы,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (3.7.13)$$

Требуется найти такое d , чтобы сумма $d + f$ была наименьшей. Одно из наиболее простых в техническом плане решений будет такое. Собирающая линза дает действительное изображение, если обе величины d и f больше фокусного расстояния F . Обозначим $d = F + a$, $f = F + b$, где a и b — положительные величины. Подставляя эти выражения в (3.7.13), после коротких элементарных преобразований приходим к равенству

$$F^2 = ab.$$

Отсюда для суммы $a + b$ получаем выражение

$$a + b = a + \frac{F^2}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{F}{\sqrt{a}} \right)^2 + 2F.$$

Минимальное значение этой суммы, а следовательно, и суммы $d + f = 2F + a + b$, получается при $a = F$. При этом $b = F$, $a + b = 2F$, $d + f = 4F$. Таким образом, предмет следует поместить на расстоянии $d = 2F$ от линзы. Сравните это решение с двумя другими решениями этой задачи (№ 26.26 в сборнике задач [6]).

Обратим внимание на то, что более простые преобразования, по сравнению с приведенными в сборнике [6], оказались возможными потому, что проводился не формальный математический анализ соотношения (3.7.13), а были привлечены дополнительные физические соображения о том, в каком случае возможно образование действительного изображения с помощью линзы. Привлечение физических соображений позволяет существенно упростить математические выкладки.

Часто встречаются задачи, в которых требуется получить определенный результат с помощью графического построения, используя

правила хода лучей в тонкой линзе. При этом более предпочтительными являются построения, основанные на использовании оптических осей.

Задача 3.56. Задан ход луча MM через тонкую линзу. Требуется построить ход луча NN после линзы. Положение фокусов линзы неизвестно.

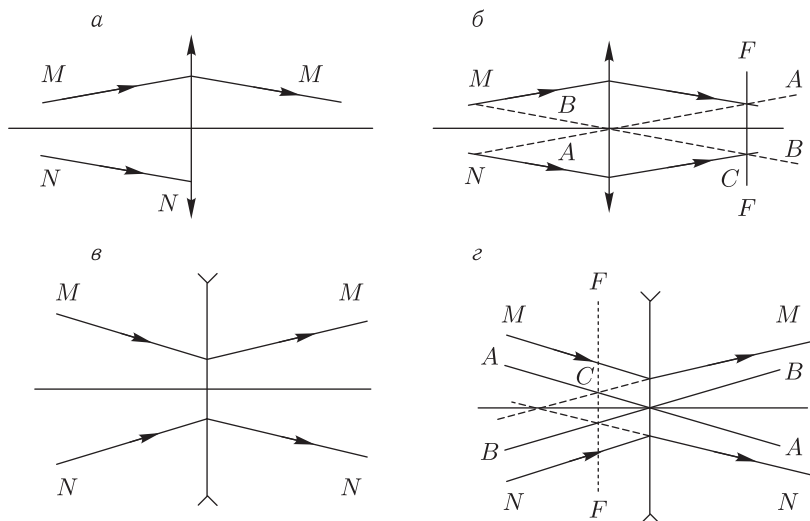


Рис. 3.56.

Наиболее рациональный, но не единственный способ решения состоит в следующем. Проводим через оптический центр линзы побочную оптическую ось AA , параллельную лучу MM , падающему на линзу. Пересечение этой оси с преломленным лучом MM определяет положение фокальной плоскости FF . Затем проводим побочную оптическую ось, параллельную падающему на линзу лучу NN , которая пересекает фокальную плоскость в точке C . Преломленный луч NN после линзы пройдет через эту точку C .

Таким же образом может быть решена аналогичная задача в случае рассеивающей линзы. Условие задачи и ее решение показаны на рис. 3.56.

Единственная разница по сравнению с собирающей линзой в том, что с фокальной плоскостью пересекаются не сами лучи, а их продолжения после линзы, показанные на рисунке пунктиром.

При решении некоторых количественных задач для получения точного ответа порой достаточно графического построения хода световых лучей.

Задача 3.57. Цилиндрический пучок света радиусом $r_1 = 4$ см направляется на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Пройдя линзу, пучок дает на экране пятно радиусом $r_2 = 2$ см. Каков будет радиус r_3 пятна на экране, если собирающую линзу заменить рассеивающей с тем же фокусным расстоянием?

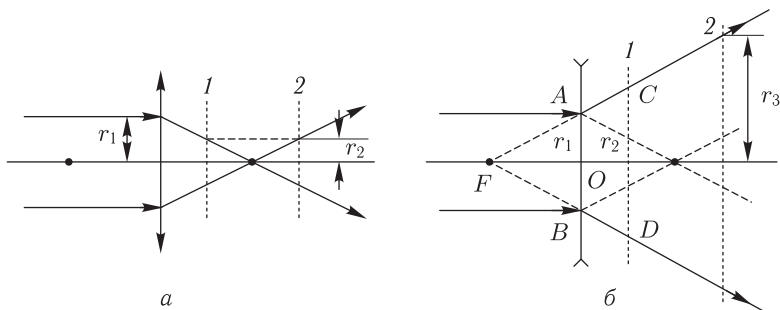


Рис. 3.57.

Из анализа рис. 3.57, а следует, что пройдя линзу, пучок лучей может дать пятно радиусом r_2 при двух положениях экрана, а следовательно задача имеет два решения.

По рис. 3.57, б. видно, что, так как собирающая и заменившая ее рассеивающая линзы имеют одинаковое фокусное расстояние, лучи AC и BF' параллельны, а следовательно,

$$AB = CD = 2r_1.$$

Тогда для первого положения экрана получаем

$$r_3 = 2r_1 - r_2, \quad r_3 = 6 \text{ см.}$$

Для второго положения экрана

$$r_3 = 2r_1 + r_2, \quad r_3 = 10 \text{ см.}$$

Эффективным методом решения задач является сочетание графического построения хода световых лучей и принципа симметрии. Одним из проявлений принципа симметрии в оптических явлениях можно считать обратимость хода световых лучей.

Задача 3.58. На пути симметричного сходящегося пучка лучей поставили собирающую линзу с фокусным расстоянием 24 см. В результате лучи собрались на главной оптической оси в точке A на расстоянии 8 см от оптического центра линзы. На каком расстоянии от точки A сойдутся лучи, если линзу убрать?

Выполним построение хода лучей, даваемое линзой (см. рис. 3.58), и обозначим буквой B пересечение сходящихся лучей в отсутствие линзы.

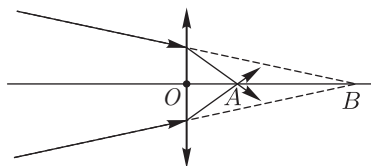


Рис. 3.58.

Если воспользоваться идеей обратимости хода лучей, то тогда точку A можно считать источником света, а точку B ее мнимым изображением. Тогда $OB = f$ (мнимое), $OA = d$, а искомое расстояние $AB = f - d$.

Применяя формулу тонкой линзы,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (3.7.14)$$

получаем

$$f = \frac{Fd}{F-d}, \quad AB = \frac{d^2}{F-d} = 12,5 \text{ см.}$$

Отметим, что можно считать точку A изображением, а точку B — мнимым источником света, тогда неизвестной величиной становится мнимое $OB = d$, $OA = f$, а формула (3.7.14) оказывается симметричной относительно такой замены.

При отсутствии какой-либо симметрии, позволяющей резко сократить математические преобразования, решение задач, в условии которых фигурируют линзы, сводится к решению системы алгебраических уравнений, которые можно составить в соответствии с условием задачи.

Задача 3.59. *С помощью тонкой собирающей линзы на экране получено изображение предмета с пятикратным увеличением ($n = 5$). Экран передвигают на $l = 30$ см вдоль главной оптической оси линзы. Затем, не трогая линзы, передвигают вдоль оси предмет, добываясь нового четкого изображения, которое оказывается увеличенным в три раза ($m = 3$). Каково фокусное расстояние линзы? На каком расстоянии d от линзы находился предмет в первом случае?*

Используя формулу тонкой линзы, запишем уравнение для первого случая

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (3.7.15)$$

После передвижения экрана увеличение стало меньше, поэтому естественно считать, что $f_1 = f - l$. После передвижения предмета с помощью формулы линзы получим второе уравнение

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f-l}. \quad (3.7.16)$$

К этим уравнениям следует добавить еще два, описывающие увеличение изображения в каждом случае:

$$\frac{f}{d} = n, \quad (3.7.17)$$

$$\frac{f_1}{d_1} = \frac{f-l}{d_1} = m. \quad (3.7.18)$$

Получили систему уравнений (3.7.15)–(3.7.18) с четырьмя неизвестными: d , f , d_1 и F . Приравняв правые части (3.7.15) и (3.7.16), получим

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f-l},$$

или, после учета уравнений (3.7.17) и (3.7.18),

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{d} = \frac{m+1}{f-l}.$$

Умножаем это равенство на d и еще раз используем (3.7.17):

$$\frac{n+1}{n} = \frac{m+1}{n-l/d},$$

откуда

$$d = l \frac{n+1}{n(n-m)} = 18 \text{ см.}$$

Для фокусного расстояния с помощью (3.7.15) и (3.7.17) получаем формулу

$$F = \frac{nd}{n+1} = 15 \text{ см.}$$

Задача 3.60. Определите увеличение лупы с фокусным расстоянием F .

С помощью лупы рассматривают мнимое изображение предмета, помещенного на расстоянии d от линзы немного меньшем фокусного расстояния F . В отсутствие лупы предмет высотой h рассматривается с расстояния наилучшего зрения d_0 , так что он виден под углом $\Theta = \frac{h}{d_0}$ (рис. 3.60, а).

Ход лучей при использовании лупы показан на рис. 3.60, б.

При мнимом изображении предмета формула тонкой линзы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}. \quad (3.7.19)$$

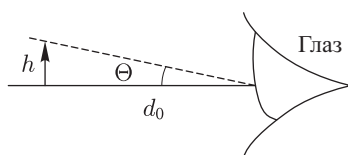


Рис. 3.60, а.

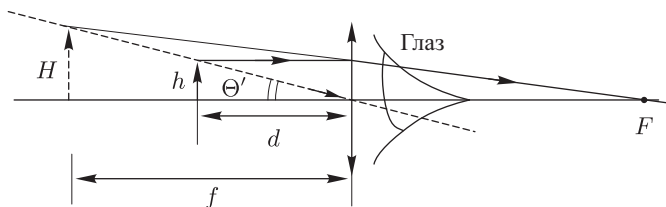


Рис. 3.60, б.

Угол Θ' , под которым виден предмет, определяется равенством

$$\Theta' = \frac{H}{f} = \frac{h}{d}.$$

Увеличение лупы Γ дается выражением

$$\Gamma = \frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{d_0}{d}. \quad (3.7.20)$$

Видно, что увеличение лупы зависит от расстояния d , на котором помещается предмет перед линзой. С помощью формулы (3.7.19) выражаем d через F и f и перепишем (3.7.20) в виде

$$\Gamma = \frac{d_0 (F + f)}{F f}. \quad (3.7.21)$$

Из соотношения (3.7.21) следует, что увеличение лупы зависит от f , то есть от расстояния, на которое аккомодирован глаз. Если глаз аккомодируется на бесконечность ($f \rightarrow \infty$), то $\Gamma = d_0/F$, а предмет помещается в фокусе линзы ($d = F$), что даже проще увидеть из формул (3.7.19) и (3.7.20). Если же глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения ($f = d_0$), то при этом из (3.7.21) получим

$$\Gamma = 1 + \frac{d_0}{F}.$$

Таким образом, увеличение лупы является субъективной величиной, зависящей от свойств глаза и психологического состояния наблюдателя, хотя возможность варьирования этой величины лежит в узких пределах: обычно фокусное расстояние лупы невелико и отношение

$$\frac{d_0}{F} \geq 10.$$

При решении задач относительно оптических приборов необходимо аккуратно строить ход лучей в рассматриваемой системе. В некоторых случаях это сразу указывает на простейший путь получения ответа.

Задача 3.61. Телескоп с диаметром объектива D наведен на отдаленную светящуюся точку. Из окуляра телескопа выходит параллельный пучок лучей, образующий на экране круглое светлое пятно диаметром d . Определить увеличение телескопа.

На первый взгляд в условии задачи мало данных для нахождения искомой величины, равной отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Однако после построения хода лучей, соответствующего условию задачи, все сразу становится ясным.

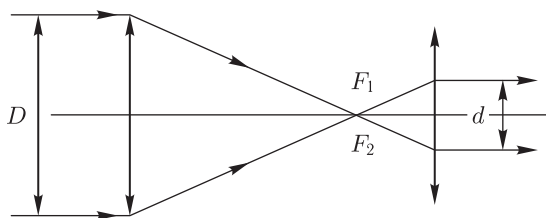


Рис. 3.61.

Лучи, идущие от отдаленной светящейся точки, можно считать параллельными между собой. После прохождения через объектив такие лучи проходят через задний фокус объектива F_1 . После выхода из окуляра лучи снова оказываются параллельными между собой, что возможно, только если эти лучи прошли через передний фокус окуляра. Значит, положение заднего фокуса объектива совпадает с положением переднего фокуса окуляра, как показано на рисунке. Теперь из подобия треугольников на рисунке следует выражение для увеличения Γ :

$$\Gamma = \frac{F_1}{F_2} = \frac{D}{d}.$$

Задача 3.62. На дифракционную решетку с периодом $d = 0,01$ мм нормально к поверхности решетки падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Сразу за решеткой параллельно ее плоскости расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Чему равно расстояние между первым и вторым главными максимумами на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы?

Положение максимумов на экране рассчитывается в приближении геометрической оптики. При этом основу рассмотрения составляют два обстоятельства.

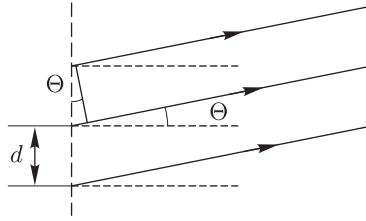


Рис. 3.62, а.

1. Разность хода Δ между параллельными соответствующими лучами пучков от двух соседних щелей определяется соотношением

$$\Delta = d \sin \Theta,$$

где Θ — угол между направлением луча и нормалью к плоскости решетки.

2. После прохождения линзы параллельные лучи, распространяющиеся под углом Θ , собираются в одной точке экрана, расположенного в фокальной плоскости линзы. Линза при этом не вносит дополнительной разности хода между лучами. Положение максимума на экране определяется лучом, проходящим через оптический центр линзы, который идет, не преломляясь.

Направление Θ на первый главный максимум определяется условием

$$d \sin \Theta = \lambda, \quad (3.7.22)$$

а на второй максимум — аналогичным условием,

$$d \sin \Theta_1 = 2\lambda. \quad (3.7.23)$$

Если линза расположена вплотную к решетке, то расстояние на экране от нулевого главного максимума до первого дается выражением

$$x = F \operatorname{tg} \Theta,$$

а до второго максимума — выражением

$$x_1 = F \operatorname{tg} \Theta_2.$$

Поэтому расстояние Δx между первым и вторым максимумами равно

$$\begin{aligned} \Delta x = x_1 - x &= F (\operatorname{tg} \Theta_1 - \operatorname{tg} \Theta) = \\ &= F \left(\frac{\sin \Theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta_1}} - \frac{\sin \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta}} \right); \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

здесь использовано соотношение

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} = \frac{\sin \Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta}}.$$

Подставляя в (3.7.24) выражения для синусов Θ и Θ_1 из (3.7.22) и (3.7.23), получаем

$$\Delta x = F\lambda \frac{2\sqrt{d^2 - \lambda^2} - \sqrt{d^2 - 4\lambda^2}}{\sqrt{(d^2 - \lambda^2)(d^2 - 4\lambda^2)}}. \quad (3.7.25)$$

На рис. 3.62, б показан ход лучей в предположении, что плоскость линзы совпадает с плоскостью дифракционной решетки.

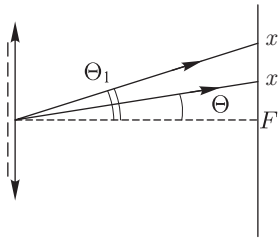


Рис. 3.62, б.

Используя заданные в условии задачи значения d и λ , видим, что

$$\frac{\lambda}{d} = 6 \cdot 10^{-2} \ll 1,$$

поэтому выражение (3.7.25) можно упростить, используя приближенную формулу

$$\sqrt{d^2 - \lambda^2} = d\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}} \approx d\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{d^2}\right), \quad \frac{\lambda}{d} \ll 1.$$

В результате получаем, что

$$\Delta x = \frac{F\lambda}{d} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{d^2}\right) \approx \frac{F\lambda}{d}.$$

Отметим, что при

$$\frac{\lambda}{d} \ll 1, \quad \sin \Theta \approx \operatorname{tg} \Theta$$

и расстояние Δx с учетом (3.7.22) и (3.7.23) сразу получается в виде

$$\Delta x = \frac{F\lambda}{d}.$$

Задача 3.63. В некоторых случаях в спектре дифракционной решетки пропадает главный максимум определенного порядка. Объясните это явление и сформулируйте условие, при котором будет отсутствовать второй главный максимум.

Условие, при котором реализуется главный максимум k -го порядка, получается при рассмотрении интерференции пучков, идущих

от соседних отверстий в решетке. Если d — период решетки, то это условие имеет вид

$$d \sin \Theta = k\lambda. \quad (3.7.26)$$

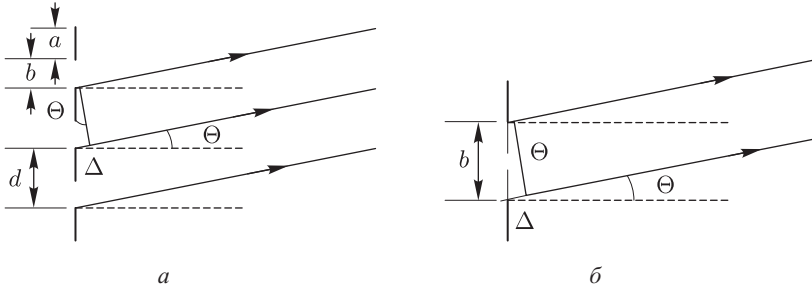


Рис. 3.63.

Период решетки состоит из прозрачной и непрозрачной частей с размерами b и a , соответственно, т. е. $d = a + b$.

Рассмотрим теперь интерференцию лучей внутри одного пучка, проходящего через щель шириной b . Если $b \sin \Theta = \lambda$, то лучи внутри этого пучка погасят друг друга, поскольку для каждого луча найдется другой луч с разностью хода, равной $\lambda/2$. То же самое будет и при условии

$$b \sin \Theta = n\lambda, \quad (3.7.27)$$

где n — целое число.

Если угол Θ в (3.7.22) и (3.7.23) один и тот же, то максимум k -го порядка в спектре решетки отсутствует. Сравнивая выражения (3.7.26) и (3.7.27), получаем $b = nd/k$. Второй главный максимум ($k = 2$) будет отсутствовать при условии $b = nd/2$.

Видно, что физический смысл имеет только $N = 1$, ибо при $n = 2$ размер отверстия равен периоду решетки (т. е. не остается места для непрозрачной части a), а при $n = 3, 4, \dots$ получается $b > d$. Отметим, что всегда, как это следует из (3.7.26) и (3.7.27), $n < k$, поскольку $b < d$.

Глава 4

СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

4.1. Газовые законы

Задача 4.1. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает пустой стакан цилиндрической формы с тонкими стенками, наполовину погруженный в жидкость. Стакан переворачивают и ставят на поверхность жидкости вверх дном, удерживая его от опрокидывания.

- а) На какую глубину погрузится стакан?
- б) На какую глубину нужно погрузить этот стакан, надавливая на него сверху, чтобы он утонул?

Высота стакана h , атмосферное давление p_0 . Температура постоянна.

Обозначив через m и S массу и площадь дна стакана, запишем условие плавания в жидкости пустого стакана в виде

$$\frac{1}{2}\rho Shg = mg. \quad (4.1.1)$$

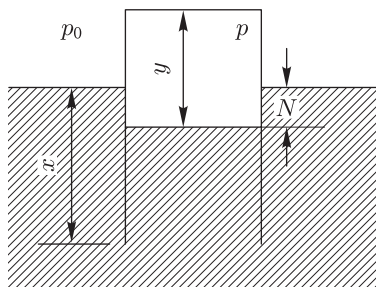


Рис. 4.1, а.

а) На рис. 4.1, а изображен стакан, плавающий вверх дном; через x обозначена глубина, до которой погружается стакан, а через y — расстояние от дна стакана до уровня жидкости в нем. Стакан будет

плавать, если сила тяжести стакана mg и действующая сверху на дно стакана сила атмосферного давления, равная p_0S , будут уравновешены направленной вверх силой давления воздуха в стакане на его дно:

$$mg + p_0S = pS. \quad (4.1.2)$$

Когда стакан коснулся поверхности жидкости своими краями, в нем оказалась замкнутой некоторая масса воздуха при атмосферном давлении p_0 . Входящая в стакан жидкость при его погружении сжимает этот воздух до давления p при неизменной температуре. Учитывая цилиндричность стакана, по закону Бойля–Мариотта имеем

$$p_0h = py. \quad (4.1.3)$$

В равновесии давление воздуха p в перевернутом стакане равно давлению в жидкости на глубине, соответствующей ее уровню в перевернутом стакане, для которого, очевидно, справедлива формула

$$z = x + y - h. \quad (4.1.4)$$

Условие равновесия имеет вид

$$p = p_0 + \rho gz = p_0 + \rho g(x + y - h). \quad (4.1.5)$$

Приведенные соотношения позволяют найти x , то есть глубину, на которую погружается перевернутый стакан. Выражая mg из (4.1.1) и подставляя его в (4.1.2), получаем для давления p выражение

$$p = p_0 + \rho g \frac{h}{2}. \quad (4.1.6)$$

Теперь из соотношения (4.1.3) находим

$$y = \frac{p_0h}{p} = \frac{p_0h}{p_0 + \rho gh/2}. \quad (4.1.7)$$

Подставляя p из (4.1.6) и y из (4.1.7) в соотношение (4.1.5), находим

$$x = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{2\rho gh}{2p_0 + \rho gh} \right). \quad (4.1.8)$$

б) Теперь надавим на стакан сверху, заставив его погрузиться на некоторую глубину, как показано на рисунке.

Через x по-прежнему обозначено расстояние от поверхности воды до краев погруженного стакана, а через y — расстояние от дна стакана до уровня жидкости в перевернутом стакане. При погружении стакана вода еще больше сжимает воздух в нем, что приводит к уменьшению значения y по сравнению с (4.1.7). Условие того, что на этой глубине стакан начнет тонуть, имеет вид

$$mg + p_0S + \rho g(x - h) \geq ps. \quad (4.1.9)$$

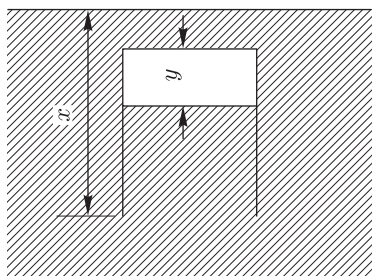


Рис. 4.1, б.

По закону Бойля–Мариотта имеем соотношение

$$p_0 h = p y, \quad (4.1.10)$$

но значения p и y теперь другие, чем в (4.1.3). Подставляя в неравенство (4.1.9) значение mg из (4.1.1) и учитывая, что давление p равно давлению в жидкости на глубине, соответствующей уровню жидкости в перевернутом стакане, т. е.

$$p = p_0 + \rho g(x - h + y), \quad (4.1.11)$$

и выражая y из (4.1.10), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \rho h g + p + 0 + \rho g(x - h) \geq p_0 + \rho g(x - h) + \rho g \frac{p_0 h}{p},$$

или

$$p \geq 2p_0. \quad (4.1.12)$$

Теперь с помощью (4.1.9) получим для x неравенство

$$x \geq \frac{h}{2} + \frac{p_0}{\rho g}. \quad (4.1.13)$$

Отметим одно интересное обстоятельство. Подсчитаем величину $\rho S g z$. С помощью соотношений (4.1.5) и (4.1.6) видим, что $z = h/2$. Но тогда $\rho S g z = \rho S g h/2 = mg$, как это следует из соотношения (4.1.1). Таким образом, хотя жидкость не действует на стакан непосредственно с выталкивающей силой, а поддерживает его в жидкости сила давления воздуха внутри стакана, но формально полученное равенство имеет вид закона Архимеда, потому что произведение $\rho S g z$ имеет смысл силы тяжести, действующей на жидкость, объем которой Sz равен объему погруженной части тела, под которым в данном случае нужно понимать стакан и воздух внутри него.

В заключение оценим численные значения величин, полученных при решении задачи. Предположив, что высота стакана $h = 20$ см, с помощью выражения (4.1.8) получим, что $x = 10 \cdot (1 + 0,002)$ см, то есть почти не отличается от $h/2$, если в качестве жидкости берется вода, а атмосферное давление нормальное. Если же в качестве жидкости взять ртуть с $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$, то для глубины погружения стакана x получится $x = 10 \cdot (1 + 0,23)$ см. С помощью выражения (4.1.13) можно убедиться, что для того чтобы утопить перевернутый стакан в ртути, его нужно опустить на глубину, равную $(10 + 76) \text{ см} = 86 \text{ см}$, а вот чтобы утопить его в воде, нужно будет погрузить его до глубины,

равной $(10 + 1000) \text{ см} \approx 10 \text{ м}$. Отпущенный на глубине меньше 10 м перевернутый стакан будет всплывать на поверхность.

Задача 4.2. На рисунке показано устройство насоса, с помощью которого можно откачивать воздух из сосуда объемом V_0 . При ходе поршня вправо воздух входит из сосуда в камеру насоса объемом V , а при обратном ходе поршня воздух из камеры насоса выталкивается наружу, где атмосферное давление равно p_0 . Определите, чему равен остающийся при обратном ходе поршня влево объем камеры V' , если после $n = 1000$ циклов (т. е. ходов поршня вправо и влево) давление в сосуде перестанет уменьшаться. Принять, что $V/V_0 \ll 1$. Температуру считать постоянной.

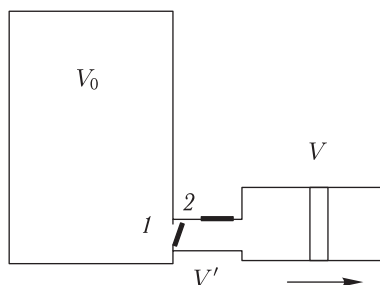


Рис. 4.2.

Естественно, что процесс откачки воздуха из сосуда объемом V_0 начинается при давлении внутри сосуда, равном p_0 . Иначе избыток воздуха можно просто выпустить наружу. Будем сначала считать, что при обратном ходе поршня влево весь воздух, находившийся в камере насоса, выталкивается наружу. Это соответствует условию $V' = 0$. Тогда при первом ходе поршня вправо клапан 2 закрывается под давлением наружного воздуха, а клапан 1 открывается, и воздух входит из откачиваемого сосуда в камеру насоса. При постоянной температуре по закону Бойля–Мариотта имеем

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V), \quad (4.1.14)$$

где p_1 — давление в сосуде и камере насоса после первого хода поршня вправо. При обратном ходе поршня клапан 1 закрывается, а когда давление сжимаемого воздуха в камере насоса достигает значения p_0 , клапан 2 открывается, и весь воздух из камеры выталкивается наружу.

При втором ходе поршня вправо все повторяется, и при достижении поршнем крайнего правого положения справедливо равенство

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + V). \quad (4.1.15)$$

Подставляя сюда значение p_1 из (4.1.14), получаем

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V + V_0} \right)^2. \quad (4.1.16)$$

С помощью метода математической индукции можно строго доказать почти очевидное равенство

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V + V_0} \right)^n. \quad (4.1.17)$$

где p_n — давление в сосуде после n ходов поршня.

Если теперь учесть, что $V' \neq 0$, то становится очевидным, что воздух откачивается до тех пор, пока выполняется условие

$$p'_n \geq p_0,$$

где p'_n — давление после n -го хода поршня насоса влево, определяемое условием

$$p'_n V' = p_n (V + V'), \quad (4.1.18)$$

которое означает, что при $V' \neq 0$ клапан 2 перестанет открываться при ходе поршня влево, когда давление воздуха в остающейся части камеры объемом V' становится равным наружному давлению p_0 . Подставляя в (4.1.18) давление p_n из (4.1.17), получаем, что откачка происходит до тех пор, пока выполнено неравенство

$$p_0 \leq p_n \frac{V}{V'} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^n \frac{V + V'}{V'},$$

откуда для V' с учетом того, что $V' \ll V$, получаем неравенство, при выполнении которого происходит откачка,

$$V' \leq V \left(\frac{V_0}{V + V_0} \right)^n.$$

Равенство при $n = 1000$ дает ответ на поставленный в задаче вопрос:

$$V' = V \left(\frac{V_0}{V + V_0} \right)^n. \quad (4.1.19)$$

Однако теперь становится очевидным, что, строго говоря, при $V' \neq 0$ эта модель непоследовательна и приведенные выше соотношения неверны. Если сначала давление в остающейся части камеры насоса равнялось p_0 , то уравнение (4.1.14) следует заменить на

$$p_0(V_0 + V') = p_1(V_0 + V + V'),$$

а уравнение (4.1.15) — на

$$p_1 V_0 + p_1 V' = p_2 (V_0 + V + V'),$$

поскольку теперь перед ходом поршня вправо имеется воздух при давлении p_1 в сосуде и при давлении p_0 в остающейся части камеры насоса.

При получении этого равенства учтено, что не изменяется полная масса воздуха, находящегося в сосуде и остающегося в камере насоса после первого хода поршня влево, после того, как поршень передвинется в крайнее правое положение. В результате уже выражение для p_2 оказывается более сложным, чем (4.1.16):

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0(V_0 + V')}{(V + V_0 + V')^2} + \frac{V'}{V + V' + V_0} \right). \quad (4.1.20)$$

Нетрудно написать рекуррентное соотношение, связывающее давления p_k и p_{k+1} после k -го и $(k+1)$ -го ходов поршня. Учитывая, что после k -го хода поршня влево давление в откачиваемом сосуде равно p_k , а давление в остающейся части камеры насоса равно p_0 , получим:

$$p_k V_0 + p_0 V' = p_{k+1} (V_0 + V + V'). \quad (4.1.21)$$

Используя математическую индукцию, нетрудно показать, что давление p_n в сосуде после n ходов поршня в выбранной модели равно

$$p_n = \frac{p_0}{V + V'} \left(V \left(\frac{V_0}{V_0 + V + V'} \right)^n + V' \right). \quad (4.1.22)$$

Очевидно, что при $V' \ll V$ мы снова получаем выражение, определяемое формулой (4.1.17). Соответственно, условие прекращения откачки определяется формулой (4.1.19). Таким образом, последовательный учет конечности объема при $V' \ll V$ не приводит к изменению результата.

Возможны и несколько иные рассуждения при учете конечности объема V' . Найдем условие того, что воздух откачивается на $(n+1)$ -м цикле. При ходе поршня вправо клапан I открывается, когда выравнивается давление во всех сосудах.

Пусть объем левой части насоса в этот момент равен V_1 , тогда, учитывая, что до движения поршня влево давление слева от него равнялось p_0 , получим

$$p_0 V' = p_n (V' + V_1) \Rightarrow V_1 = V' \left(\frac{p_0}{p_n} - 1 \right).$$

Очевидное условие того, что клапан I откроется при движении поршня вправо, имеет вид

$$V_1 \leq V.$$

Это неравенство можно переписать как неравенство относительно объема V' :

$$V' \leq \frac{V}{\frac{p_0}{p_n} - 1}.$$

Подставляя значение p_n из формулы (4.1.22), в приближении $V' \ll V$, получаем неравенство

$$V' \leq V \frac{\left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^n}{1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^n}.$$

Несложно понять, что при большом значении n это неравенство совпадает с тем, что получено в предыдущих рассуждениях (формула (4.1.19)).

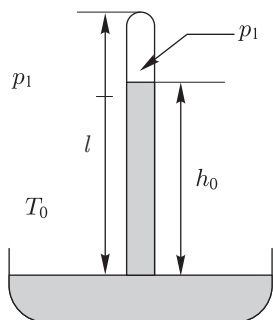


Рис. 4.3.

Задача 4.3. В трубку открытого ртутного чашечного барометра попал пузырек воздуха, в результате чего при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0 высота столба ртути равна h_0 . Длина цилиндрической трубки равна l , и она погружена в ртуть в чашке только своими краями. Уровень ртути в чашке при изменении атмосферного давления практически не меняется. Определите атмосферное давление p'_0 при температуре T , если высота столба ртути в трубке равна h .

При решении этой задачи удобно использовать внесистемную единицу давления — сантиметр ртутного столба. При этом давление и длины трубки и столбов ртути измеряются в сантиметрах.

Давление p_1 воздуха в трубке над столбом ртути за счет попавшего пузырька воздуха, очевидно равно

$$p_1 = p_0 - h_0. \quad (4.1.23)$$

Давление этого воздуха p при температуре T и высоте ртутного столба, равной h , можно найти с помощью уравнения состояния идеального газа,

$$\frac{p_1(l - h_0)}{T_0} = \frac{p(l - h)}{T}, \quad (4.1.24)$$

откуда при учете равенства (4.1.24) получаем

$$p = \frac{T}{T_0} \frac{(p_0 - h_0)(l - h)}{l - h}. \quad (4.1.25)$$

Теперь для атмосферного давления p'_0 при температуре T и высоте столба ртути, равной h , справедливо соотношение

$$p'_0 = h + p = h + \frac{T}{T_0} \frac{(p_0 - h_0)(l - h)}{l - h}. \quad (4.1.26)$$

Ответ получен, но можно отметить интересное обстоятельство. Предположим, что во второй части условия задачи задано атмосферное давление p'_0 , а требуется определить, какой при этом будет длина столба ртути h . Тогда, считая p'_0 известным, можно воспользоваться уравнением для h , получаемым с помощью соотношения (4.1.26). Но это уравнение квадратное. Обозначив $T/T_1 = a > 0$, запишем его в виде

$$h^2 - (l + p'_0)h + lp'_0 - a(p_0 - h_0)(l - h_0) = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$h = \frac{1}{2} \left(l + p'_0 \pm \sqrt{(l - p'_0)^2 + 4a(p_0 - h_0)(l - h_0)} \right).$$

Стоящее под знаком квадратного корня выражение положительно, так как положительны оба его слагаемых. Возможна ситуация, когда квадратный корень будет иметь меньшее значение, чем сумма $l + p'_0$. И возникает вопрос, какой смысл имеет то обстоятельство, что возможны два положительных значения h и какое из них будет реализовано на практике. Исследование этого вопроса сведется к установлению того факта, что корень уравнения со знаком плюс перед радикалом имеет значение h , большее, чем p'_0 (точнее — $h > l$), что лишено физического смысла. Поэтому выбираем значение h со знаком минус перед радикалом.

Задача 4.4. В запаянной с нижнего конца цилиндрической стеклянной трубке длиной l находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой h , достигающим до верхнего открытого края трубки. Трубку переворачивают открытым концом вниз, часть ртути при этом выливается. Какова длина h_1 оставшегося в трубке столбика ртути, если атмосферное давление равно p_0 ? Температура постоянна.

На рисунке показаны обозначения длин и давлений при двух положениях трубки. Как и в предыдущей задаче, используется внесистемная единица измерения давления — сантиметр ртутного столба.

Запишем уравнение состояния газа, запертого в трубке столбиком ртути:

$$p(l - h) = p_1(l - h_1). \quad (4.1.27)$$

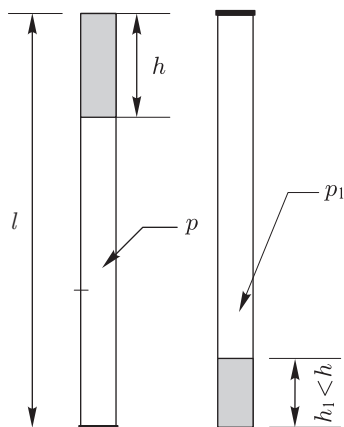


Рис. 4.4.

Для давлений газа p и p_1 при двух положениях трубки справедливо

$$p = p_0 + h, \quad p_1 = p_0 - h_1.$$

При учете этих равенств уравнение (4.1.27) принимает вид

$$(p_0 + h)(l - h) = (p_0 - h_1)(l - h_1). \quad (4.1.28)$$

Для искомой величины h_1 получаем квадратное уравнение,

$$h_1^2 - (p_0 + l)h_1 + h(p_0 + h - l) = 0,$$

корни которого равны

$$h_1 = \frac{1}{2} \left(p_0 + l \pm \sqrt{(p_0 + l)^2 - 4h(p_0 + h - l)} \right). \quad (4.1.29)$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, физический смысл имеет только решение со знаком минус перед квадратным корнем.

Задача 4.5. Три баллона емкостью V_1 , V_2 и V_3 заполнены одинаковым газом: давление газа в первом баллоне равно p_1 , а температура T_1 ; во втором баллоне — p_2 и T_2 ; в третьем — p_3 и T_3 . Какое давление установится в газе, если соединить все три баллона и сделать общую температуру равной T ?

При соединении баллонов и установлении общей температуры T парциальные давления газа каждого баллона определяются из уравнений состояния газа,

$$\begin{aligned} \frac{p_1 V_1}{T_1} &= \frac{p'_1 (V_1 + V_2 + V_3)}{T}, \\ \frac{p_2 V_2}{T_2} &= \frac{p'_2 (V_1 + V_2 + V_3)}{T}, \\ \frac{p_3 V_3}{T_3} &= \frac{p'_3 (V_1 + V_2 + V_3)}{T}, \end{aligned}$$

где p'_i ($i = 1, 2, 3$) — парциальные давления газов после соединения баллонов. Сложим почленно эти уравнения и учтем, что в силу закона Дальтона сумма парциальных давлений равна полному давлению p в образовавшейся смеси:

$$p = p'_1 + p'_2 + p'_3. \quad (4.1.30)$$

С учетом соотношения (4.1.30) в результате сложения получим

$$p = \frac{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} + \frac{p_3 V_3}{T_3}}{V_1 + V_2 + V_3} T. \quad (4.1.31)$$

Задачу можно решить, не используя закон Дальтона. Запишем уравнения состояния газов в баллонах до их соединения в форме уравнений Менделеева–Клапейрона,

$$\begin{aligned}\frac{p_1 V_1}{T_1} &= \frac{m_1}{\mu} R, \\ \frac{p_2 V_2}{T_2} &= \frac{m_2}{\mu} R, \\ \frac{p_3 V_3}{T_3} &= \frac{m_3}{\mu} R,\end{aligned}\tag{4.1.32}$$

и уравнение состояния смеси при температуре T :

$$\frac{p(V_1 + V_2 + V_3)}{T} = \frac{m}{\mu} R,\tag{4.1.33}$$

где m — полная масса газа, равная сумме масс газов в баллонах,

$$m = m_1 + m_2 + m_3.\tag{4.1.34}$$

Складывая почленно уравнения (4.1.32) и сравнивая с уравнением (4.1.33), при учете (4.1.34) получим следующее равенство:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} + \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p(V_1 + V_2 + V_3)}{T},$$

из которого следует формула (4.1.31) для давления p смеси газов при температуре T .

Задача 4.6. *Стеклянный баллон емкостью V наполнен некоторым газом до давления p_1 . Его масса при взвешивании оказалась при этом равной m_1 . Часть газа выпустили наружу, так что давление стало равным p_2 , а масса баллона — m_2 . Определите плотность этого газа при давлении p и той же температуре, при которой проводился опыт.*

Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний газа в баллоне, обозначив массы газа через M_1 и M_2 . Тогда получим

$$\begin{aligned}p_1 V &= \frac{M_1}{\mu} RT, \\ p_2 V &= \frac{M_2}{\mu} RT.\end{aligned}$$

Составим разность этих уравнений, учитывая, что $M_1 - M_2$ равно разности масс баллона с газом в рассматриваемых случаях, т. е.

$$M_1 - M_2 = m_1 - m_2.$$

Получим

$$(p_1 - p_2) V = \frac{m_1 - m_2}{\mu} RT.\tag{4.1.35}$$

Для плотности газа ρ при давлении p и температуре T с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона получается выражение

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}.$$

Подставляя сюда значение RT из соотношения (4.1.35), находим

$$\rho = \frac{p(m_1 - m_2)}{V(p_1 - p_2)}. \quad (4.1.36)$$

Формально полученное выражение оказалось одинаковым для различных газов, однако, молярная масса μ неявно присутствует в числителе (4.1.36), поскольку разность масс $(m_1 - m_2)$ пропорциональна μ .

Задача 4.7. Тонкостенный стеклянный сферический баллон массой M наполняется кислородом при температуре T . Какое количество кислорода можно закачать в баллон, если допустимое напряжение в стенках баллона равно σ ? Плотность стали равна ρ .

Количество газа в баллоне зависит от давления, которое может выдержать его стенка. Для определения величины максимального давления рассмотрим условие равновесия элемента поверхности баллона площадью ΔS , вид которого сверху и сбоку (то есть в разрезе) показан на рис. 4.7.

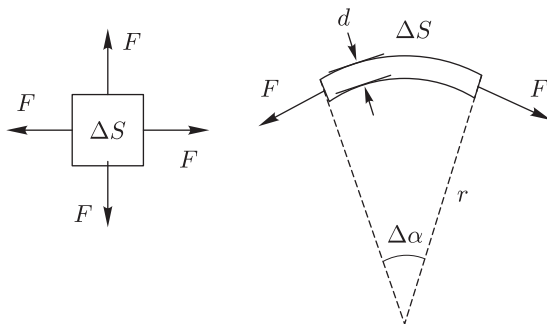


Рис. 4.7.

Сила давления газа на этот элемент поверхности равна

$$F_1 = p\Delta S = pr^2(\Delta\alpha)^2. \quad (4.1.37)$$

Эта сила уравновешивается равнодействующей четырех сил напряжения в стенках, каждая из которых равна

$$F = \sigma dr \cdot \Delta\alpha \quad (4.1.38)$$

(где d — толщина стенки баллона), так что произведение $dr \cdot \Delta\alpha$ равно площади сечения элемента поверхности баллона, параллельного его грани. Поэтому для F_1 справедливо соотношение

$$F_1 = 2F \cdot \Delta\alpha = 2\sigma dr(\Delta\alpha)^2. \quad (4.1.39)$$

Условие равновесия рассматриваемого элемента поверхности с помощью (4.1.37) и (4.1.39) запишем в виде

$$pr^2(\Delta\alpha)^2 = 2\sigma dr(\Delta\alpha)^2,$$

откуда для допустимого значения давления p получаем

$$p = \frac{2\sigma d}{r}. \quad (4.1.40)$$

Толщину стенки сферического баллона d можно найти с помощью уравнения

$$M = \rho \cdot 4\pi r^2 d.$$

Выражая из этого соотношения d и подставляя его в выражение (4.1.40), для давления p получаем

$$p = \frac{\sigma M}{2\pi r^3 \rho}. \quad (4.1.41)$$

Масса m кислорода в баллоне определяется с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона,

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (4.1.42)$$

Поскольку по условию задачи баллон тонкостенный, то можно не различать наружный и внутренний его радиусы и считать объем газа V равным

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (4.1.43)$$

Подставляя в уравнение (4.1.42) давление p из (4.1.41) и объем V из (4.1.43), находим максимальную массу m кислорода в баллоне, при которой не происходит его разрушения,

$$m = \frac{2M\sigma\mu}{3\rho RT}.$$

Задача 4.8. *Определите зависимость подъемной силы, действующей на воздушный шар, от высоты при условии постоянства температуры атмосферы. Закон изменения давления атмосферы с высотой неизвестен. Газ из оболочки воздушного шара не вытекает. Давлением, обусловленным кривизной оболочки шара, можно пренебречь.*

Выталкивающая сила, действующая на воздушный шар, определяется законом Архимеда, а подъемная сила — разностью между

выталкивающей силой и действующей на шар силой тяжести. Поскольку сила тяжести шара постоянна, то можно считать, что давление газа внутри оболочки и давление атмосферы снаружи одинаковы. Постоянство температуры атмосферы по всей высоте и неизменность массы газа внутри оболочки позволяют использовать закон Бойля–Мариотта при сравнении состояний газа на двух разных высотах,

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (4.1.44)$$

Плотность воздуха в атмосфере дается выражением

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}. \quad (4.1.45)$$

Выталкивающая сила, действующая на воздушный шар, равна

$$F_A = \rho g V.$$

Составляя отношение выталкивающих сил, действующих на шар на разных высотах, получаем

$$\frac{F_{A1}}{F_{A2}} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}. \quad (4.1.46)$$

Подставляя сюда значения плотности воздуха на разных высотах, получаемых с помощью формулы (4.1.45), и учитывая уравнение (4.1.44), убеждаемся, что

$$\frac{F_{A1}}{F_{A2}} = \frac{\mu p_1 V_1}{RT} \cdot \frac{RT}{\mu p_2 V_2} = 1.$$

Таким образом, выталкивающая, а следовательно, и подъемная сила при сформулированной в условии задачи модели явления не зависят от высоты.

Обратим внимание на то, что условие постоянства температуры атмосферы по высоте не требуется для справедливости сделанного вывода. Нужно только, чтобы подъем шара происходил достаточно медленно, чтобы шар успевал приходить в тепловое равновесие с окружающим воздухом и его температура была бы равна температуре воздуха на той высоте, на которой он находился. Действительно, при этом вместо закона Бойля–Мариотта (4.1.44) будет справедливо уравнение состояния газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (4.1.47)$$

Теперь, составляя отношение выталкивающих сил в соответствии с (4.1.46) и с учетом уравнения (4.1.47), получаем

$$\frac{F_{A1}}{F_{A2}} = \frac{\mu p_1 V_1}{RT_1} \cdot \frac{RT_2}{\mu p_2 V_2} = 1.$$

Отметим, однако, что установление теплового равновесия газа в оболочке с окружающим воздухом невозможно при реальных скоростях подъема воздушного шара.

Задача 4.9. Простой газовый термометр выполнен в виде стеклянной бутылки объемом $V = 0,5$ л, плотно закрытой пробкой. В пробку герметично вставлена открытая с обоих концов стеклянная трубка с внутренним радиусом $r = 2$ мм. Помещая в трубку столбик подкрашенной воды, можно по изменению его положения судить об изменении температуры. Оцените чувствительность $\Delta h / \Delta T$ такого термометра, где Δh — изменение уровня столбика в трубке при изменении температуры на ΔT .

Давление воздуха p внутри бутылки равно сумме атмосферного давления p_0 и давления столбика воды высотой h ,

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (4.1.48)$$

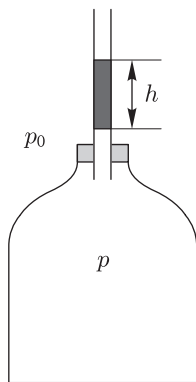


Рис. 4.9.

Пренебрегая изменением атмосферного давления, для воздуха в бутылке при изменении температуры можно воспользоваться законом Гей–Люссака,

$$\frac{V + \Delta V}{V} = \frac{T + \Delta T}{T}. \quad (4.1.49)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V}{T}. \quad (4.1.50)$$

Изменение объема ΔV воздуха в бутылке при нагревании на ΔT происходит из-за поднятия столбика воды в трубке на величину Δh ,

$$\Delta V = S \Delta h = \pi r^2 \Delta h. \quad (4.1.51)$$

Подставляя в (4.1.50) объем V бутылки и ΔV , даваемое формулой (4.1.51), а также принимая для комнатной температуры T значение $T = 300$ К, получаем для чувствительности термометра при этой температуре значение

$$\frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{V}{T \pi r^2} \approx 10 \text{ см/К}.$$

Задача 4.10. Длина трубки, рассмотренной в предыдущей задаче, равна $H = 10$ см. Трубку заполняют водой до ее верхнего края. На сколько градусов нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы вся вода вылилась из трубки через ее верхний край?

Давление p воздуха в бутылке в начальный момент времени равно

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (4.1.52)$$

где h — длина столбика воды в трубке, а его объем равен V . Когда вся выльется из трубки при повышении температуры через ее верхний край, давление p_1 воздуха в бутылке в последний момент будет равно

$$p_1 \geq p_0, \quad (4.1.53)$$

а его объем V_1 равен

$$V_1 = V + SH, \quad (4.1.54)$$

где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения трубки.

Используя численные значения входящих в соотношения (4.1.52)–(4.1.54) величин, нетрудно убедиться, что выполняется неравенство

$$pV \geq p_1 V_1.$$

Но это неравенство фактически означает, что температура в начальном состоянии газа может быть даже больше, чем в конечном, и тем не менее вся вода выльется из трубки. Получается парадоксальный вывод о том, что для вытеснения воды из трубки наружу воздух в бутылке можно даже охлаждать, что практически нелепо. Действительно, при охлаждении воздуха в бутылке уровень жидкости в трубке будет понижаться.

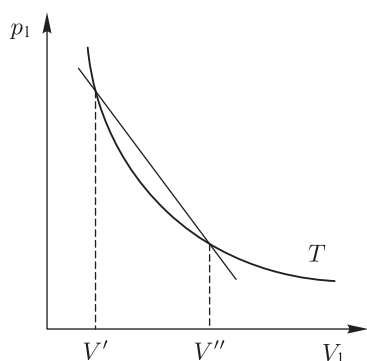


Рис. 4.10.

Для выяснения ситуации нужно аккуратно проанализировать условия равновесия столбика воды в трубке. В любой момент давление воздуха в бутылке в состоянии равновесия при условии, что уровень воды в трубке совпадает с ее верхним краем, определяется соотношением

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1, \quad (4.1.55)$$

где h_1 — длина столбика воды в трубке, которую можно выразить через длину трубки H , ее поперечное сечение S , начальный объем V воздуха в бутылке и его текущий объем V_1 :

$$h_1 = H - \frac{V_1 - V}{S}. \quad (4.1.56)$$

Из соотношений (4.1.55) и (4.1.56) видно, что давление p_1 линейно зависит от текущего объема V_1 воздуха в бутылке, что показано на рисунке.

Пересечение изотермы, соответствующей температуре T , с прямой линией, определяющей зависимость p_1 от V_1 , задает два значения объема воздуха V' и V'' , при которых газ в бутылке может находиться в равновесии при температуре T . Однако это равновесие будет различным при объемах V' и V'' . Равновесие при объеме V' будет устойчивым, в чем можно убедиться, рассматривая небольшие изменения объема воздуха при постоянной температуре (то есть происходящие вдоль изотермы). Например, при увеличении объема давление уменьшается, поэтому газ сжимается, возвращаясь в исходное состояние. Равновесие при объеме V'' будет неустойчивым, в чем легко убедиться аналогичными рассуждениями. Поэтому при самом незначительном увеличении объема газа он будет продолжать расширяться до тех пор, пока вся вода не выльется из трубки.

Теперь можно описать процесс, происходящий при постепенном нагревании воздуха в бутылке. Сначала объем воздуха будет медленно увеличиваться, а его состояние равновесия будет оставаться устойчивым, чему соответствует объем V''' в точке пересечения прямой равновесия с изотермой при более высокой температуре $T_1 > T$. Вода из трубки будет при этом медленно выливаться наружу. При дальнейшем медленном нагревании воздуха в бутылке точки пересечения прямой равновесия и изотерм при все более высоких температурах будут сближаться, пока не сольются при некоторой температуре T_2 . При температуре выше T_2 прямая равновесия не имеет пересечений с изотермами. Это означает, что, начиная с температуры T_2 , для воздуха в бутылке не существует равновесного состояния. Поэтому при температурах больших T_2 вся остающаяся вода вытесняется наружу.

Для определения температуры T_2 можно исходить из условия, что прямая равновесия имеет только одну точку пересечения с изотермой, соответствующей температуре T_2 . Уравнение прямой равновесия получается с помощью равенств (4.1.55) и (4.1.56):

$$p_1 = p_0 + \rho g \left(H + \frac{V}{S} \right) - \frac{\rho g}{S} V_1. \quad (4.1.57)$$

Запишем уравнение, связывающее начальное состояние воздуха в бутылке при температуре T с состоянием при температуре T_2 . Поскольку до этого момента масса воздуха не меняется, то уравнение состояния имеет вид

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Подставляя сюда значения p из (4.1.52) и p_1 из (4.1.57), приходим к квадратному уравнению для V_1 ,

$$\frac{\rho g}{S} V_1^2 - \left(p_0 + \rho g \left(H + \frac{V}{S} \right) \right) V_1 + \frac{T_2}{T} (p_0 + \rho g h) V = 0. \quad (4.1.58)$$

Выпишем корни этого уравнения и учтем, что температура T_2 определяется условием существования только одного значения V_1 , при котором прямая равновесия (4.1.57) пересекается с изотермой, соответствующей температуре T_2 . При этом дискриминант в выражениях для корней уравнения (4.1.58) равен нулю. Это условие приводит к равенству

$$\left(p_0 + \rho g \left(H + \frac{V}{S}\right)\right)^2 - 4 \frac{T_2}{T} \frac{\rho g}{S} (p_0 + \rho g h) V = 0,$$

из которого можно найти T_2 .

Задача 4.11. На рисунке показан круговой процесс с идеальным газом, происходящий при постоянном давлении. Укажите точки, в которых масса газа максимальна и минимальна.

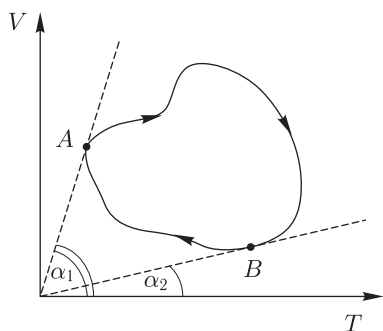


Рис. 4.11.

Все задачи такого типа решаются с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона, из которого для массы m имеем соотношение

$$m = \frac{\mu p V}{RT}.$$

При постоянном давлении получаем

$$m = \frac{C V}{T},$$

где C — постоянный коэффициент.

Отношение V/T определяет тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и имеющей общую точку с кривой на рисунке. Видно, что точка A соответствует максимальной массе газа, а точка B — минимальной.

4.2. Свойства жидкостей и твердых тел

Задача 4.12. Стальная балка, имеющая вид прямоугольного параллелепипеда, заделана между двумя вертикальными стенками при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Затем температура поднимается до значения t . Какую силу давления со стороны балки должны выдерживать стены, чтобы они не разрушились? Зависит ли эта сила от длины балки?

Обозначим через l длину балки при начальной температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. При увеличении температуры до значения t свободная балка увеличит свою длину до значения

$$l_1 = l + \Delta l = l(1 + \alpha t), \quad (4.2.1)$$

где α — коэффициент линейного расширения стали при температурах, близких к 0°C . Стены не дают балке увеличить свою длину. Если возникающая при этом деформация упругая, то на основании закона Гука

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE}, \quad (4.2.2)$$

где E — модуль Юнга для стали, а S — площадь поперечного сечения балки. Выражая Δl из соотношения (4.2.1) и подставляя в (4.2.2), найдем, что

$$F = SE\alpha t. \quad (4.2.3)$$

Именно такую силу давления должны выдерживать стены. Из этого выражения следует, что сила F зависит от площади поперечного сечения балки, но не от ее длины l . Однако, если масса балки m , то для площади поперечного сечения S справедливо соотношение

$$S = \frac{m}{\rho l},$$

где ρ — плотность стали при 0°C .

Подставляя это значение S в (4.2.3), переписываем выражение для силы F :

$$F = \frac{mE\alpha t}{\rho l}. \quad (4.2.4)$$

Из выражения (4.2.3) следует, что при любой массе балки m сила F пропорциональна S . Но из (4.2.4) следует, что при конкретной заданной массе балки m сила F обратно пропорциональна l . Как понимать такую ситуацию?

Здесь мы сталкиваемся с таким же вопросом, как и в механике движения по окружности: для центростремительного ускорения a возможны формулы, выражающие эту величину либо через линейную скорость v , либо через угловую скорость ω :

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Можно спросить, пропорционально ли ускорение радиусу вращения R или обратно пропорционально? Более того, учитывая, что $v = \omega R$, ускорение a можно представить в виде

$$a = v\omega,$$

где зависимость от R формально вообще отсутствует.

Но между этими ситуациями существует принципиальная разница. В механике вращательного движения приведенные формулы отражают различные условия движения тела и характеризуют именно эти условия, а не движущееся тело. В случае заделанной между стенками балки в формулах (4.2.3) и (4.2.4) стоит одна и та же величина S ,

характеризующая балку. Только в (4.2.3) она присутствует в явном виде, а в (4.2.4) выражена через объем m/ρ и длину балки l . Поэтому правильным будет такой ответ на вопрос в условии задачи: сила пропорциональна площади сечения S балки и не зависит от ее длины.

Задача 4.13. *Благодаря наличию упругих свойств капля несжимаемой жидкости может совершать пульсирующие колебания, при которых ее форма изменяется по циклу: сферическая–вытянутая–сферическая–сплюснутая–сферическая и так далее. От каких величин и как может зависеть период таких колебаний?*

Вопрос можно исследовать с помощью метода анализа размерностей. Величины, от которых может зависеть период, — это плотность ρ , радиус капли r , коэффициент поверхностного натяжения σ и модуль упругости, в качестве которого можно взять модуль Юнга. Но в условии задачи четко задана физическая модель явления: капля считается несжимаемой, то есть не изменяющей своего объема. В этом случае, естественно, ответ не может зависеть от модуля упругости, связанного именно с изменением объема.

Выпишем размерности трех остающихся параметров ρ , r и σ :

$$[\rho] = ML^{-3}, \quad [r] = L, \quad [\sigma] = MT^{-2}.$$

Видно, что из этих величин нельзя составить безразмерный параметр γ (не с чем сократить T , входящее только в размерность σ) и параметр с размерностью длины. Параметр с размерностью времени должен обязательно содержать $\sqrt{\sigma}$ в знаменателе выражения, после чего элементарно подбираются степени ρ и r , приводящие к сокращению M и L . В результате находим, что

$$t \sim \sqrt{\frac{\rho r^3}{\sigma}}.$$

Колебание сферических капель можно наблюдать в состоянии невесомости, это было успешно продемонстрировано космонавтами на борту космических кораблей, вращающихся по орбите вокруг Земли. Помимо капель в космосе есть и другие сферические тела — звезды, планеты и спутники планет. Вещество на звездах, а также на планетах-гигантах Солнечной системы по многим свойствам близко к жидкостям. Однако причина того, что эти тела имеют сферическую форму иная, чем причина, по которой равновесное состояние капли является сферой. При больших массах тел становится значительным гравитационное взаимодействие. Именно гравитация стягивает жидкие тела в сферы. Потенциальная энергия, обусловленная гравитационным взаимодействием, минимальна для сферического тела.

Но если так, то возможны колебания жидких сферических тел, обусловленные не силами поверхностного натяжения, а гравитационными силами. Представляет интерес оценить период таких колебаний.

Для оценки применим тот же метод. Теперь вместо коэффициента поверхностного натяжения следует использовать константу, характеризующую гравитационное взаимодействие G , входящую в выражение для гравитационной силы. Несложно получить размерность этой константы:

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

В результате для характерного периода колебаний находим, что

$$t' \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

Примечательный факт — период колебаний не зависит от размеров тела.

Что же будет, если одновременно учесть силы гравитации и силы поверхностного натяжения? Для этого следует из четырех величин ρ , r , σ и G составить безразмерную константу. Это можно просто сделать, взяв любую степень отношения времен t и t' . Удобно взять квадрат отношения, тогда для константы получим

$$\alpha = \frac{t}{t'} = \frac{G\rho^2 r^3}{\sigma}.$$

Чтобы понять физический смысл этой константы, представим ее в следующем виде:

$$\alpha = \frac{G(\rho r^3)^2/r}{\sigma r^2}.$$

Теперь становится достаточно очевидно, что в числителе стоит величина, пропорциональная потенциальной энергии гравитационного взаимодействия, а в знаменателе — величина, пропорциональная энергии сил поверхностного натяжения. Достаточно очевидно, что, когда энергия гравитации становится много больше энергии сил поверхностного натяжения, именно она будет определять период колебаний. Это, очевидно, соответствует условию $\alpha \gg 1$.

Если теперь вместо безразмерной константы α взять константу $\alpha^{1/3}$, то приведенное неравенство можно записать в виде $r \gg r_0$, где

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{\sigma}{G\rho^2}}.$$

Физический смысл величины r_0 достаточно понятен — это радиус капли (или, может быть, жидкого шара) при котором энергия сил гравитации по порядку величины сравнивается с энергией сил поверхностного натяжения.

Чтобы понять, насколько велик шар, сделаем оценку для воды. В системе СИ величины, входящие в формулу для r_0 , имеют следующие численные значения (для краткости мы не приводим наименования единиц измерения): $\rho = 10^3$, $\sigma = 0,073$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$. В результате получим, что $r_0 \approx 10$ м. Конечно, это не капля, но и не такой уж огромный шар; современными средствами можно построить космический корабль, вмещающий такой шар. Заметим, что приведенные оценки можно рассматривать лишь как оценки по порядку величины. Тем не менее, можно утверждать, что период колебаний водяного шара с размерами много большими, чем 10 м, не зависит от размеров шара и по порядку величины равен

$$t' \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \approx 1 \text{ ч.}$$

Заметим также, что для того, чтобы применить полученные результаты к космическим телам, нужно учесть еще и другие свойства вещества на этих телах, в частности, сжимаемость.

Задача 4.14. Замкнутая петля из резинового шнура длиной l с поперечным сечением S помещается на пленку жидкости. После прокола пленки внутри петли петля растянулась в окружность радиусом R . Определите коэффициент поверхностного натяжения σ жидкости, считая модуль Юнга резины равным E .

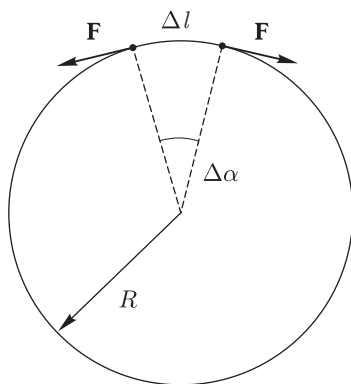


Рис. 4.14.

Рассматривая условия равновесия показанного на рисунке элемента окружности Δl , приходим к равенству, устанавливающему связь между силой F натяжения растянутого резинового шнура и растягивающей петлю наружу силой $\sigma \Delta l$,

$$F \Delta \alpha = \sigma \Delta l,$$

или, учитывая, что $\Delta l = R\Delta\alpha$,

$$F = \sigma R. \quad (4.2.5)$$

Сила натяжения шнура определяется с помощью закона Гука. Поскольку длина шнура увеличилась от значения l до $2\pi r$, закон Гука имеет вид

$$\frac{2\pi R - l}{l} = \frac{F}{SE}. \quad (4.2.6)$$

Сравнивая выражения (4.2.5) и (4.2.6), получаем, что

$$\sigma = \frac{SE(2\pi R - l)}{lR}. \quad (4.2.7)$$

Обратим внимание на то, что соотношение (4.2.7) можно получить из энергетических соображений, не рассматривая в явном виде действующие в системе силы. Вначале имелась потенциальная энергия пленки жидкости. В результате описанного в условии задачи процесса появилась потенциальная энергия растянутого шнура, но пропала энергия проколотой внутри петли пленки. В результате для потенциальной энергии системы W можно записать выражение

$$W = \frac{k(2\pi R - l)^2}{2} - \pi R^2 \sigma,$$

где k — коэффициент упругости растянутого шнура.

Как следует из соотношения (4.2.6), $k = SE/l$, поэтому выражение для энергии W будет иметь вид

$$W = \frac{SE(2\pi R - l)^2}{2l} - \pi R^2 \sigma. \quad (4.2.8)$$

В состоянии устойчивого равновесия (пока не исчезла вся пленка жидкости) энергия W имеет минимальное возможное значение. После прокола жидкости часть потенциальной энергии перейдет в кинетическую энергию, так как начнутся колебания с изменением радиуса шнура. Эти колебания затухнут, и система перейдет в состояние устойчивого положения равновесия.

Это условие определяет радиус r образовавшейся окружности. Находя условия минимума выражения (4.2.8) (дифференцируя его по r или дополняя до полного квадрата), приходим к соотношению (4.2.7).

Задача 4.15. В цилиндре под поршнем находится мыльный пузырь радиусом R , наполненный воздухом. Давление воздуха в цилиндре вокруг пузыря равно p_0 . Медленно вдвигая поршень, сжимают воздух в цилиндре, так что радиус пузыря уменьшается вдвое. Считая температуру постоянной, определите новое давление p' воздуха в цилиндре.

Давление воздуха в пузыре больше давления окружающего воздуха на величину $4\sigma/R$, где коэффициент 4 соответствует тому, что у пузыря имеются две искривленные поверхности — наружная и внутренняя, каждая из которых увеличивает давление под ней на $2\sigma/R$. Поэтому вначале давление p в пузыре будет равно

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}.$$

Поскольку после сжатия воздуха в цилиндре до давления p' радиус пузыря уменьшается вдвое, давление p_1 внутри пузыря станет равным

$$p_1 = p' + \frac{8\sigma}{R}.$$

При неизменной температуре давления p и p_1 связаны между собой уравнением, соответствующим закону Бойля–Мариотта,

$$p \frac{4}{3} \pi R^3 = p_1 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^3,$$

или

$$p_0 + \frac{4\sigma}{R} = \frac{1}{8} \left(p' + \frac{8\sigma}{R} \right).$$

Отсюда для p' получаем

$$p' = 8p_0 + \frac{24\sigma}{R}.$$

Задача легко обобщается на случай, когда в ходе процесса температура меняется от значения T до T_1 . Следует только иметь ввиду, что при этом будут разные значения коэффициента поверхностного натяжения σ в начальном и конечном состояниях.

Задача 4.16. *Масса стеклянного сосуда равна m ; масса этого же сосуда, наполненного ртутью при 0°C , равна m_1 . После нагревания сосуда с ртутью до температуры t_α часть ртути вытекла, и масса оказалась равной m_2 . Определите коэффициент объемного расширения стекла β_1 , если коэффициент объемного расширения ртути равен β .*

Обозначим объем внутренней части сосуда при 0°C через V . Тогда при температуре t° этот объем дается выражением

$$V_1 = V (1 + \beta_1 t),$$

поскольку «пустой» объем внутренней части сосуда расширяется при нагревании так, как будто он заполнен стеклом.

Плотность ртути ρ при температуре t связана с ее плотностью ρ_0 при 0°C соотношением

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}.$$

С помощью этих соотношений получаем очевидные равенства:

$$m_1 - m = \rho_0 V, \quad m_2 - m = \frac{\rho_0 V (1 + \beta_1 t)}{1 + \beta t}.$$

Поделив почленно эти равенства, получаем уравнение для определения β_1 :

$$\beta_1 = \frac{m_2 - m_1 + \beta (m_2 - m) t}{(m_1 - m) t}.$$

Задача 4.17. Оцените максимальную высоту гор на Земле, считая, что деформация горы под действием собственной силы тяжести перестает быть упругой, когда относительная деформация достигает значения $\Delta l/l \leq 10^{-2}$ и гора «расползается» у своего основания.

Из закона Гука следует, что

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E} = \frac{\rho g H}{E}.$$

Поэтому $\rho g H \approx 10^{-2} E$ и, используя характерные значения параметров горных пород $\rho = 10^4 \text{ кг/м}^3$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, получаем для высоты горы оценку $H \approx 20 \text{ км}$. На такой высоте для ускорения свободного падения можно принять значение $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Можно привести другую оценку максимальной высоты гор, считая, что разрушение горы начинается тогда, когда потенциальная энергия в поле тяжести Земли оказывается достаточной для расплавления основания горы. Предположим, что расплавляется нижняя часть вертикального столба высотой H , толщина которого равна d . При этом столб оседает на величину d и высвобождается потенциальная энергия, равная $\rho g H d S$, где S — площадь поперечного столба. Для расплавления массы породы, равной $\rho d S$, требуется энергия $\lambda \rho d S$, где λ — удельная теплота плавления породы. Основание горы не будет плавиться по указанной причине, если

$$\lambda \rho d S > \rho g H d S,$$

или

$$H < \frac{\lambda}{g}.$$

Используя характерное значение $\lambda \approx 200 \text{ кДж/кг}$, приходим к тому же результату, $H \approx 20 \text{ км}$.

Задача 4.18. Сферическому мыльному пузырю сообщается электрический заряд q , при этом его радиус увеличивается. Будет ли устойчивым новое равновесие пузыря?

В отсутствие электрического заряда мыльный пузырь будет в равновесии, когда давление p воздуха в нем связано с давлением p_0 наружного воздуха соотношением

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{R},$$

где r — радиус пузыря.

Сообщенный пузырю электрический заряд q равномерно распределяется по внешней поверхности пузыря, так что поверхностная плотность σ_q будет равна

$$\sigma_q = \frac{q}{4\pi R^2}. \quad (4.2.9)$$

Для определенности будем считать сообщенный заряд положительным. Теперь кроме «распирающей» пузырь силы давления находящегося внутри него воздуха и «стягивающей» его силы поверхностного натяжения действует еще одна «распирающая» его сила электростатического отталкивания. Найти силу F , действующую на элемент поверхности пузыря площадью ΔS , можно следующим образом.

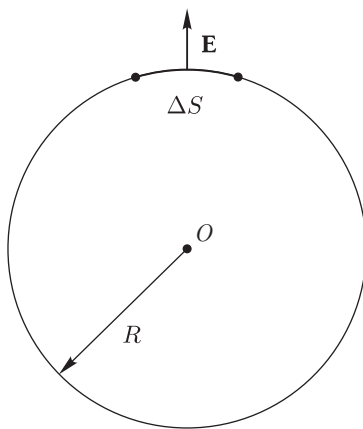


Рис. 4.18.

Снаружи пузыря напряженность поля E у его поверхности равна

$$E = k \frac{q}{R^2} = 4\pi k \sigma_q,$$

где $k = 1/4\pi\epsilon_0$, а внутри она равна нулю. Элемент поверхности ΔS создает напряженность $E' = 2\pi k \sigma_q$, направленную в обе стороны от ΔS . Это означает, что напряженность поля E_1 , создаваемая всей остальной заряженной поверхностью пузыря вблизи ΔS , равна $2\pi k \sigma_q$ и направлена по радиусу наружу. Тогда снаружи пузыря результирующая напряженность будет равна $4\pi k \sigma_q$, а внутри него — нулю. В результате

на элемент поверхности ΔS пузыря будет действовать со стороны остальной части поверхности направленная наружу сила, равная

$$F = E_1 \sigma_q \Delta S = 2\pi k \sigma_q^2 \Delta S.$$

С учетом (4.2.9) это выражение имеет вид

$$F = k \frac{q^2}{8\pi R^4} \Delta S, \quad (4.2.10)$$

откуда следует, что дополнительное «электрическое» давление p_q , распирающее пузырь, равно

$$p_q = k \frac{q^2}{8\pi R^4}. \quad (4.2.11)$$

Условие равновесия пузыря теперь запишется в виде

$$p + p_q - p_0 - \frac{4\sigma}{R} = 0. \quad (4.2.12)$$

Давление внутри пузыря при неизменной температуре обратно пропорционально его объему, поэтому, учитывая соотношение (4.2.11), выражение (4.2.12) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{a}{R^3} + \frac{a_1}{R^4} - \frac{a_2}{R} = p_0. \quad (4.2.13)$$

Здесь для удобства и компактности записи введены положительные постоянные

$$a = \frac{3mR}{4\pi\mu} T, \quad a_1 = k \frac{q^2}{8\pi}, \quad a_2 = 4\sigma,$$

где m — масса воздуха в пузыре.

Теперь для исследования устойчивости равновесия нужно выяснить характер изменения левой части соотношения (4.2.13) при небольшом изменении радиуса пузыря. Пусть радиус r увеличился на $\Delta r > 0$. При этом для левой части выражения (4.2.13) получим

$$\frac{a}{(R + \Delta R)^3} + \frac{a_1}{(R + \Delta R)^4} - \frac{a_2}{R + \Delta R},$$

поэтому (с точностью до линейных по Δr слагаемых) изменение этой левой части равно

$$- \left(\frac{3a}{R^3} + \frac{4a_1}{R^4} - \frac{a_2}{R} \right) \frac{\Delta R}{R}. \quad (4.2.14)$$

Сравнивая выражение в скобках с левой частью (4.2.13), видим, что это выражение положительно, а при $\Delta r > 0$ все выражение (4.2.14) отрицательно. Давление p_0 снаружи пузыря неизменно, поэтому, случайно расширившись, пузырь немедленно сожмется. Таким образом, равновесие пузыря устойчивое.

Задача 4.19. Какой заряд нужно сообщить мыльному пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое? Температуру считать неизменной.

Обозначим радиус пузыря до сообщения электрического заряда через r . Если наружное давление равно p_0 , то давление p воздуха внутри пузыря вначале будет равно

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}.$$

При увеличении радиуса пузыря вдвое при неизменной температуре новое давление p_1 воздуха внутри пузыря находится с помощью закона Бойля–Мариотта,

$$pV = p_1V_1,$$

откуда следует, что p_1 равно

$$p_1 = \frac{1}{8} \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R} \right). \quad (4.2.15)$$

Как было показано в предыдущей задаче, дополнительное «электрическое» давление p_q , распирающее пузырь при сообщении ему заряда, обратно пропорционально четвертой степени радиуса. Используя формулу (4.2.11) и учитывая, что после сообщения заряда радиус пузыря стал вдвое больше, получаем

$$p_q = k \frac{q^2}{8\pi(2R)^4} = k \frac{q^2}{128\pi R^4}. \quad (4.2.16)$$

Условие равновесия заряженного пузыря с удвоенным радиусом имеет вид

$$p_1 + p_q - p_0 - \frac{2\sigma}{R} = 0.$$

Подставляя в это равенство p_1 из (4.2.15) и p_q из (4.2.16), получаем уравнение для определения заряда:

$$q^2 = \frac{16\pi R^3}{k} (12\sigma R + 7p_0 R).$$

Из этого выражения следует, что возможны предельные случаи, когда электрический заряд определяется исключительно атмосферным давлением p_0 , а когда — исключительно поверхностным натяжением мыльной пленки. При $p_0 R \ll \sigma$ получаем, что

$$q^2 = \frac{192\pi R^3 \sigma}{k},$$

а при $p_0 R \gg \sigma$ квадрат заряда будет равен

$$q^2 = \frac{112\pi R^4 p_0}{k}.$$

Как было показано в предыдущей задаче, новое равновесие пузыря будет устойчивым.

Задача 4.20. Какой заряд q_1 нужно поместить в центр мыльного пузыря, чтобы при помещении на его поверхность заряда q радиус

пузыря остался неизменным? Будет ли при этом равновесие пузыря устойчивым при смещениях заряда q_1 из центра?

Очевидно, что знак этого заряда должен быть противоположен знаку заряда q . Действие заряда q_1 на элемент ΔS поверхности пузыря должно компенсировать действие на этот элемент остальной заряженной поверхности пузыря. Сила взаимодействия заряда q_1 с элементом ΔS заряженной поверхности равна

$$F = k \frac{q_1 \sigma_q}{R^2} \Delta S = k \frac{q_1 q}{4\pi R^4} \Delta S,$$

где использовано соотношение (4.2.9) для поверхностной плотности электрического заряда q на пузыре. Сила действия остальной заряженной поверхности на элемент ΔS равна (см. (4.2.10))

$$F = k \frac{q^2}{8\pi R^4} \Delta S.$$

При равновесии эти силы равны, поэтому $q_1 = q/2$. На заряд q_1 , находящийся внутри пузыря, электрическая сила со стороны заряда q не действует, поскольку напряженность поля, создаваемого зарядом q , там равна нулю. Однако заряд q_1 будет вызывать поляризацию диэлектрической пленки мыльного пузыря и будет сильнее притягиваться к той ее части, ближе к которой он окажется. Поэтому, отклонившись от центра пузыря, он туда уже не вернется.

Задача 4.21. Для измерения температуры термостата используется железная проволока, имеющая при $t = 20^\circ \text{C}$ сопротивление $R = 15 \text{ Ом}$. Какова температура термостата, если при помещении в него проволоки ее сопротивление оказалось равным $R_1 = 18 \text{ Ом}$? Необходимые для решения дополнительные данные найдите в таблицах.

Изменение сопротивления проволоки происходит как за счет изменения ее геометрических размеров, так и за счет изменения удельного сопротивления при изменении температуры. Однако, сравнив коэффициент линейного теплового расширения железа $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ с коэффициентом изменения сопротивления $\chi = 6 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, убеждаемся, что изменением размеров проволоки можно пренебречь по сравнению с изменением удельного сопротивления. Поэтому для сопротивления R при $t = 20^\circ \text{C}$ справедливо

$$R = R_0 (1 + \chi t^\circ),$$

а для R_1 при неизвестной температуре термостата t_1

$$R_1 = R_0 (1 + \chi t_1^\circ),$$

где R_0 — сопротивление проволоки при 0°C . Разделяя почленно эти уравнения и используя приближенную формулу

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a, \quad \text{при } a \ll 1, \quad (4.2.17)$$

получаем

$$t_1^\circ = \frac{R_1 - R}{R\chi} + t^\circ \approx 53^\circ\text{C}.$$

Задача 4.22. Барометр имеет шкалу, по которой отсчитывается длина ртутного столба. При температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$ длина столба ртути по латунной шкале равна $H_1 = 75,13$ см. Какой будет длина H_0 столба ртути при $t_0 = 0^\circ\text{C}$? Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Изменение объема ртутного столба при изменении температуры происходит, в основном, за счет изменения длины. Поскольку при изменении длины ртутного столба изменяется и длина шкалы, то относительно латунной шкалы длина ртутного столба меняется с эффективным коэффициентом линейного расширения, равным $\beta - \alpha$. В результате H_1 равно

$$H_1 = H_0 \left(1 + (\beta - \alpha) t_1^\circ \right),$$

откуда при учете равенства (4.2.17) получаем длину столба H_0 :

$$H_0 \approx H_1 \left(1 - (\beta - \alpha) \chi t_1^\circ \right) = 78,4 \text{ см.}$$

4.3. Основы термодинамики

Простейшие задачи этого раздела относятся к так называемым калориметрическим. В этих задачах в условиях тепловой изоляции калориметра и отсутствия совершаемой работы решение сводится к составлению уравнения теплового баланса. Самое главное здесь, как уже указывалось в первой главе, составить уравнение баланса именно для того процесса, который в действительности происходит. Наиболее тонкие места здесь связаны с изменением агрегатного состояния вещества.

Задача 4.23. Кусок льда массой $m = 0,6$ кг находится в закрытом калориметре объемом $V = 1 \text{ м}^3$, из которого откачан воздух. Вначале температура льда и калориметра равны $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Нагреванием температуру довели до $t = 100^\circ\text{C}$ и продолжали нагревать до тех пор, пока температура оставалась постоянной. Какое количество теплоты потребовалось для совершения этого процесса без учета теплоты, потребовавшейся для нагревания самого калориметра?

Задача была бы совершенно стандартной, если бы сосуд представлял собой открытый калориметр. Поскольку необходимое количество теплоты определяется начальным и конечным состоянием, а не зависит от последовательности превращений с отдельными частями системы, то для необходимого количества теплоты в открытом калориметре было бы справедливо уравнение

$$Q = c_{\text{л}}m(0^\circ\text{C} - t_0^\circ) + \lambda m + c_{\text{в}}(t^\circ - 0^\circ\text{C}) + L_{\text{в}}m, \quad (4.3.1)$$

где $c_{\text{л}} = 2,1 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ — удельная теплоемкость льда, $\lambda = 334 \text{ кДж}/\text{кг}$ — удельная теплота плавления льда, $c_{\text{в}} = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ — удельная теплоемкость воды, $L_{\text{в}} = 2256 \text{ кДж}/\text{кг}$ — удельная теплота парообразования воды.

Считая эти величины постоянными, мы получили бы $Q = 1818,6 \text{ кДж}$. При этом мы пренебрегли нагреванием воздуха в калориметре.

Теперь проследим за отличиями, которые появятся в случае закрытого откачанного контейнера. Конечное состояние при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ будет представлять собой насыщенный водяной пар при давлении $p = 1 \text{ атм}$. Действительно, так как плотность насыщенного водяного пара при 100°C составляет $\rho = 0,5977 \text{ кг}/\text{м}^3$, то заданное количество льда ($m = 0,6 \text{ кг}$) полностью превратится в насыщенный пар. Процесс плавления и парообразования будет происходить теперь при более низком давлении, чем в случае открытого сосуда. Удельные теплоемкости льда, воды, а также удельная теплота плавления льда очень слабо зависят от давления и температуры, поэтому первые три слагаемые в правой части выражения (4.3.1) практически не изменятся. Однако удельная теплота парообразования, слабо зависящая от температуры, тем не менее существенно зависит от давления. Приводимое в таблицах значение L учитывает и работу, совершаемую при расширении в процессе превращения воды в пар. Эта работа при открытом калориметре равна произведению атмосферного давления p_0 на изменение объема при парообразовании. Поскольку объемом льда и жидкости можно пренебречь по сравнению с объемом пара (то есть в рассматриваемом случае объемом контейнера V), то не приходится совершать работу, равную $p_0V = 101,3 \text{ кДж}$. В результате для рассматриваемой массы льда эффективная удельная теплота парообразования L будет меньше:

$$L_1 = L - \frac{p_0V}{m} = 2090 \text{ кДж}/\text{кг}.$$

Поэтому, заменяя в (4.3.1) L на L_1 , получаем, что при закрытом предварительно откачанном контейнере $Q = 1719 \text{ кДж}$.

Составление уравнения теплового баланса в случаях, когда происходит несколько изменений агрегатного состояния компонентов системы, иллюстрируется следующей задачей.

Задача 4.24. В калориметр наливают $m_1 = 2$ кг воды при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$, а затем $m_2 = 0,8$ кг жидкого азота при температуре кипения $T_2 = 77$ К и закрывают подвижным поршнем, поддерживающим постоянное давление. В каком агрегатном состоянии и при какой температуре будет находиться вещество в калориметре после установления теплового равновесия? Считать тепловые характеристики азота и воды известными.

При составлении уравнения теплового баланса будем пренебрегать наличием воздуха в калориметре и теплоемкостью калориметра и подвижного поршня.

При остывании и замерзании воды выделяется некоторое количество теплоты, которое может привести к закипанию азота. Подсчитаем эту теплоту.

При охлаждении воды от температуры t_1 до 0°C выделяется количество теплоты

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - 0^\circ\text{C}) = 84 \text{ кДж.}$$

При замерзании всей этой воды выделится еще

$$Q'_1 = \lambda_1 m_1 = 668 \text{ кДж.}$$

Используя значение удельной теплоты парообразования азота $l_2 = 200$ кДж/кг, проверяем, хватит ли всей этой теплоты $Q_1 + Q'_1$ для того, чтобы весь азот перешел в газообразное состояние (превратился в пар):

$$Q_2 = L_2 m_2 = 160 \text{ кДж.}$$

Видно, что

$$Q_1 + Q'_1 > Q_2,$$

поэтому весь азот испарится, а пар начнет нагреваться.

Проверим, хватит ли теплоты, чтобы пар азота нагрелся до 0°C . Поскольку по шкале Цельсия начальная температура азота $t_2 = (77 - 273)^\circ\text{C} = -196^\circ\text{C}$, а его удельная теплоемкость $c_2 = 1$ кДж/(кг·К), то теплота

$$Q'_2 = c_2 m_2 (0^\circ\text{C} - t_2) = 160 \text{ Дж.}$$

Видим, что

$$Q_1 + Q'_1 > Q_2 + Q'_2.$$

Это означает, что для нагревания образовавшихся паров азота от t_2 до 0°C не требуется, чтобы вся вода замерзла. Итак, тепловое равновесие достигается при температуре 0°C , при этом вода будет

присутствовать в двух агрегатных состояниях — жидком и твердом. Найти массу $m_{\text{л}}$ образовавшегося льда теперь можно с помощью уравнения теплового баланса:

$$c_1 m_1 (t_1 - 0^\circ \text{C}) + m_{\text{л}} \lambda_1 = m_2 L_2 + c_2 m_2 (0^\circ \text{C} - t_2),$$

откуда находим $m_{\text{л}} = 0,7$ кг.

Использование первого начала термодинамики позволяет рассматривать процессы, при которых происходит как теплообмен, так и совершение макроскопической работы действующими в системе силами. Тот факт, что внутренняя энергия системы, в отличие от количества теплоты и работы, является функцией состояния системы, позволяет в ряде случаев заменять одни происходящие процессы другими при условии, что конечное состояние при этих различных процессах оказывается одинаковым.

Задача 4.25. В теплоизолированном вертикальном цилиндре под поршнем в равновесии находится идеальный газ при температуре T_1 , объеме V_1 и давлении p_1 . На поршень сверху с некоторого момента времени начинает действовать внешняя сила F , сжимающая газ, которая совершает известную работу A . Сила такова, что сжатие происходит медленно, и газ все время остается в состоянии термодинамического равновесия. Затем поршень отпускают, и он устанавливается в новом положении равновесия. Как изменится при этом температура газа?

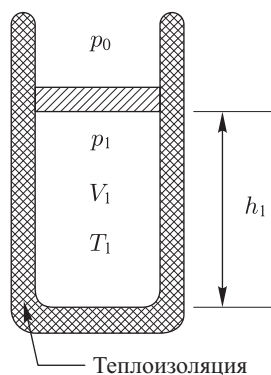


Рис. 4.25.

Условие механического равновесия поршня в начальном и конечном состояниях газа выглядят одинаково:

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}, \quad p_2 = p_0 + \frac{mg}{S}, \quad (4.3.2)$$

где p_0 — атмосферное давление, m — масса поршня, а S — его площадь.

Это означает, что в начальном и конечном состояниях газа его давление одинаково:

$$p_1 = p_2 = p.$$

При движении поршня вниз внешняя сила F и сила атмосферного давления совершают положительную работу, равную

$$A + p_0 S (h_1 - h'),$$

где h_1 и h' — начальное и конечное положение поршня.

На основании первого начала термодинамики, вследствие теплоизолированности цилиндра, эта работа равна

$$A + p_0 S (h_1 - h') = c_V (T' - T_1) + mg (h' - h_1), \quad (4.3.3)$$

где c_V — теплоемкость газа при постоянном объеме, а T' — его температура в промежуточном состоянии в момент прекращения действия внешней силы.

Подразумевается, что процесс сжатия газа происходит квазистатически, когда в каждый момент он характеризуется определенной температурой. Очевидно, что при квазистатическом перемещении поршня можно пренебречь его кинетической энергией, поэтому в правой части (4.3.3) присутствует только изменение потенциальной энергии поршня в поле тяжести, если поршень включен в состав рассматриваемой системы. Если не включать поршень в состав рассматриваемой системы, то выражение $mg (h' - h_1)$ будет присутствовать в левой части равенства (4.3.3) с противоположным знаком в качестве работы силы тяжести, которая в этом случае также будет внешней силой.

При переходе газа и поршня в конечное состояние внешняя сила F отсутствует, а совершает работу только сила атмосферного давления, поэтому

$$p_0 S (h' - h_2) = c_V (T_2 - T') + mg (h_2 - h'), \quad (4.3.4)$$

где T_2 и h_2 — температура и положение поршня в конечном состоянии.

Складывая соотношения (4.3.3) и (4.3.4), приходим к равенству:

$$A + p_0 S (h_1 - h_2) = c_V (T_2 - T_1) + mg (h_2 - h_1). \quad (4.3.5)$$

С помощью равенств (4.3.2) получаем

$$mg = (p - p_0) S.$$

Поэтому равенство (4.3.5) будет иметь вид

$$A = pS (h_2 - h_1) + c_V (T_2 - T_1) = p (V_2 - V_1) + c_V (T_2 - T_1). \quad (4.3.6)$$

Используя уравнение состояния газа, получаем

$$p (V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1).$$

Учитывая, что теплоемкость c_V связана с молярной теплоемкостью C_V соотношением $c_V = \frac{m}{\mu} C_V$, переписываем равенство (4.3.6) в виде

$$A = \frac{m}{\mu} (C_V + R) (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1).$$

Отсюда найдем конечную температуру газа:

$$T_2 = \frac{A\mu}{mC_p} + T_1. \quad (4.3.7)$$

Этот результат можно получить сразу, без рассмотрения промежуточных этапов, учитывая, что энергия газа является функцией состояния. Поскольку давление газа в начальном и конечном состояниях одинаково, то можно заменить внешнее воздействие в виде совершаемой работы A эквивалентным количеством теплоты $Q = A$ и перевести газ в конечное состояние путем нагревания при постоянном давлении. При этом мы придем в то же самое конечное состояние. Но теперь мы можем сразу написать равенство

$$A = c_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1),$$

откуда следует выражение (4.3.7) для конечной температуры.

Первое начало термодинамики позволяет находить теплоемкости рассматриваемой системы при различных происходящих в ней процессах; для систем, характеризующихся давлением p и объемом V , совершаемая системой работа равна $p\Delta V$, поэтому

$$C_\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta T} + p \frac{\Delta V}{\Delta T} \Big|_\gamma = C_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T} \Big|_\gamma. \quad (4.3.8)$$

Здесь γ означает совокупность условий, которые выполняются при переходе системы из одного заданного состояния в другое.

Задача 4.26. Идеальный газ при неизменной массе расширяется по закону $pV^n = \text{const}$. Такой процесс называется политропическим. Найдите молярную теплоемкость газа при таком процессе. Как при этом изменяется температура газа?

При квазистатическом процессе, когда применимы понятия давления и температуры, в каждый момент времени справедливо уравнение состояния газа. Для одного моля газа

$$pV = RT. \quad (4.3.9)$$

Перепишем закон изменения состояния газа, $pV^n = \text{const}$, для малых изменений объема и давления Δp и ΔV :

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V)^n = \text{const}.$$

Удерживая только слагаемые, линейные по величинам Δp и ΔV , можем приближенно записать следующее отсюда соотношение:

$$V^n \Delta p + npV^{n-1} \Delta V = 0,$$

откуда получаем

$$V \Delta p + np \Delta V = 0. \quad (4.3.10)$$

Из уравнения (4.3.9) аналогично получаем

$$p \Delta V + V \Delta p = R \Delta T. \quad (4.3.11)$$

Выражая из (4.3.10) произведение $V\Delta p$ и подставляя в (4.3.11), приходим к равенству

$$p\Delta V = \frac{R}{1-n}\Delta T.$$

Теперь, используя формулу (4.3.8), получаем выражение для теплоемкости при указанном процессе:

$$C = C_V + \frac{R}{1-n}. \quad (4.3.12)$$

Отсюда следуют хорошо известные частные случаи. При постоянном объеме $\Delta V = 0$ и $C = C_V$; при постоянном давлении, когда $V = c_1 T$, $n = 0$ и $C = C_V + R$; при постоянной температуре $n = 1$, а теплоемкость обращается в бесконечность.

При расширении газа по закону $pV^2 = \text{const}$, $n = 2$ и теплоемкость равна $C = C_V - R$. При этом из уравнения (4.3.9) следует, что $pV/T = \text{const}$, и, следовательно, при расширении температура газа уменьшается пропорционально $\sqrt{p}$.

При расширении газа по закону $p^2V = \text{const}$, $n = 1/2$ и теплоемкость равна $C = C_V + 2R = C_p + R$. Из уравнения (4.3.9) при этом следует, что

$$pRT = \text{const} = \frac{RT}{\sqrt{V}},$$

и следовательно, температура газа увеличивается пропорционально $\sqrt{V}$.

Задача 4.27. *Какое количество теплоты потребовалось подвести, если при изобарическом обратимом нагревании одного моля идеального газа в цилиндре газ совершил работу, равную A' ?*

Запишем первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A'. \quad (4.3.13)$$

Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = C_V (T_2 - T_1),$$

а количество теплоты при изобарическом процессе равно

$$Q = C_p (T_2 - T_1). \quad (4.3.14)$$

Подставляя эти значения в (4.3.13) и учитывая, что $C_p - C_V = R$, для изменения температуры получим выражение

$$T_2 - T_1 = \frac{A'}{R},$$

после чего с помощью (4.3.14) получаем для Q соотношение

$$Q = \frac{C_p A'}{R}.$$

Задача 4.28. Какое количество теплоты отдаст один моль идеального газа при его обратимом изобарическом охлаждении, если при сжатии газа в отсутствие теплообмена внешними силами была совершена работа A ?

По самому смыслу условия задачи сжатие газа и его последующее обратимое изобарическое охлаждение происходят между теми же самыми температурами T_1 и T_2 , которые только меняются местами: конечная температура T_2 при сжатии газа становится начальной при его изобарическом охлаждении до температуры T_1 . Таким образом, на обеих стадиях рассматриваемого процесса объем газа уменьшается.

При сжатии газа, которое по условию задачи происходит без теплообмена, первое начало термодинамики удобно записать в виде

$$A = \Delta U = C_V (T_2 - T_1). \quad (4.3.15)$$

При изобарическом охлаждении газа от температуры T_2 до температуры T_1 изменение его внутренней энергии $\Delta U'$ отрицательно:

$$\Delta U' = C_V (T_1 - T_2) = -\Delta U < 0.$$

Газ при этом совершает отрицательную работу A' , которая для изобарного процесса может быть представлена как

$$A' = p(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2).$$

В этом выражении p и V_2 — давление и объем газа в конце его сжатия, когда температура равна T_2 , а V — является конечным объемом газа при охлаждении, когда он снова приобретает температуру T_1 . В процессе охлаждения газ отдает некоторое количество теплоты Q' , т. е. другими словами, получает отрицательное количество теплоты Q'' , равное $-Q'$.

Первое начало термодинамики для процесса изобарического охлаждения имеет вид

$$Q'' = \Delta U' + A'.$$

С учетом приведенных соотношений эта теплота

$$Q'' = C_V (T_1 - T_2) + R(T_1 - T_2) = C_p (T_1 - T_2).$$

Разумеется, получившееся равенство можно написать сразу, не выписывая первое начало термодинамики для стадии изобарического охлаждения. Однако приведенный анализ полезен для более глубокого понимания происходящих процессов.

Подставляя сюда разность температур из (4.3.15), получаем

$$Q'' = -\frac{C_p A}{C_V} < 0.$$

Отданное газом количество теплоты Q' равно

$$Q' = -Q'' = \frac{C_p A}{C_V} = \gamma A,$$

где $\gamma = C_p/C_V$.

Эта задача может быть предложена в несколько ином варианте, когда не предполагается, что сжатие газа происходит без теплообмена.

Задача 4.29. *Какое количество теплоты отдаст один моль идеального газа при его обратимом изобарическом охлаждении, если при сжатии газа и при его изобарическом охлаждении внешними силами была совершена одинаковая работа A ?*

Проследим за изменениями, которые произойдут при решении этой задачи по сравнению с предыдущей. При сжатии газа первое начало термодинамики имеет вид

$$Q + A = \Delta U = C_V (T_2 - T_1),$$

в котором сохранены все обозначения, принятые при решении предыдущей задачи, а Q — переданное газу при сжатии количество теплоты. При изобарическом охлаждении газа первое начало термодинамики имеет следующий вид:

$$Q'' + A = \Delta U' = C_V (T_1 - T_2), \quad (4.3.16)$$

где теплота Q'' равна

$$Q'' = C_p (T_1 - T_2).$$

Подставляя это равенство в (4.3.16), находим разность температур:

$$T_1 - T_2 = -\frac{A}{C_p - C_V} = -\frac{A}{R}.$$

Теперь для Q'' получаем

$$Q'' = -\frac{C_p A}{R}$$

и, соответственно, для отдаваемой газом теплоты

$$Q' = -Q'' = \frac{C_p A}{R} = \frac{\gamma A}{\gamma - 1}.$$

Задача 4.30. *В баллоне объемом $V = 10$ л находится газ под давлением $p_0 = 1$ атм. Стенки баллона выдерживают давление $p = 10$ атм. Какое количество теплоты можно сообщить газу?*

При фиксированном объеме газа работа не совершается, поэтому первое начало термодинамики имеет вид

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T, \quad (4.3.17)$$

где m — масса газа, а ΔT — изменение его температуры при нагревании, которое можно продолжать, пока давление газа не достигнет допустимого значения p . Используя уравнение состояния,

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

получаем соотношение

$$(p - p_0)V = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Выражая отсюда изменение температуры и подставляя в (4.3.17), для теплоты Q получаем выражение

$$Q = \frac{(p - p_0)V}{\gamma - 1},$$

где $\gamma = C_p/C_V$. Видно, что количество теплоты одинаково для всех газов, имеющих одинаковые γ .

Задача 4.31. На рисунке показаны два цикла, соответствующие различным тепловым двигателям. Сравните коэффициенты полезного действия этих двигателей, считая, что рабочим телом является 1 моль одноатомного идеального газа. На осях графиков показаны значения соответствующих параметров — давления и объема.

Обозначим температуры в угловых точках на графиках через T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . Используя уравнение состояния,

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

легко найдем соотношения, связывающие значения этих температур: $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 3T_2 = 6T_1$, $T_4 = 3T_1$.

Коэффициент полезного действия равен отношению работы, совершенной за цикл, к полученному количеству теплоты. Учитывая, что работает один моль газа, для цикла 1 имеем

$$Q = C_V (T_2 - T_1) + C_p (T_3 - T_2),$$

поскольку газ получает тепло только на вертикальном и горизонтальном участке цикла. Учитывая, что газ одноатомный ($C_V = 3R/2$, $C_p = 5R/2$), переписываем это равенство в виде

$$Q = R \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}4 \right) T_1 = \frac{23}{2}RT_1.$$

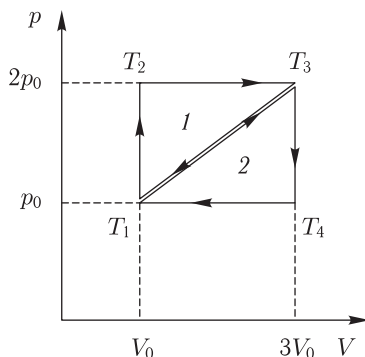


Рис. 4.31.

Работа за цикл измеряется площадью, ограниченной контуром цикла:

$$A = \frac{1}{2} p_0 \cdot 2V_0 = p_0 V_0 = RT_1.$$

Для коэффициента полезного действия цикла *1* получаем

$$\eta_1 = \frac{A}{Q} = \frac{2}{23}.$$

Для цикла *2* аналогичные вычисления провести труднее, поскольку газ получает теплоту на наклонном участке, а отдает на вертикальном и горизонтальном. Совершаемая работа такая же, как и в цикле *1*, равна разности между полученной теплотой и отданной. Поэтому можно мысленно провести цикл в обратном направлении и записать выражение для теплоты, полученной при прямом цикле:

$$Q = A + C_p (T_4 - T_1) + C_V (T_3 - T_4).$$

Теперь, как и в цикле *1*, находим

$$Q = \frac{21}{2} RT_1.$$

Для коэффициента полезного действия цикла *2*, соответственно,

$$\eta_1 = \frac{A}{Q} = \frac{2}{21},$$

а отношение КПД циклов *1* и *2* равно

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{21}{23}.$$

Задача 4.32. Найдите коэффициент полезного действия для теплового двигателя, рабочий цикл которого показан на рисунке. Рабочее тело — одноатомный идеальный газ.

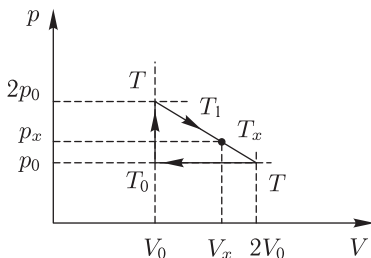


Рис. 4.32.

С помощью уравнения состояния газа установим соотношение между температурами в угловых точках цикла:

$$p_0 V_0 = RT_0, \quad 2p_0 V_0 = RT.$$

Отсюда следует, что $T = 2T_0$, а температура T при давлении $2p_0$ и при объеме $2V_0$ одинакова. Следовательно, угловые точки на острых углах лежат на одной изотерме. Поэтому температура при движении по наклонной прямой сначала увеличивается до некоторого максимального значения T_1 , а потом убывает до значения T . В результате, на наклонном участке газ сначала получает теплоту, а затем отдает ее, что затрудняет подсчет общего количества полученной газом теплоты в рассматриваемом цикле.

Запишем полное количество полученной теплоты Q :

$$Q = Q_1 + Q', \quad (4.3.18)$$

где Q_1 — теплота, получаемая на вертикальном участке цикла,

$$Q_1 = C_V (T - T_1) = C_V T_0 = \frac{3}{2} R T_0. \quad (4.3.19)$$

Подсчитаем теплоту Q' , получаемую газом на наклонной прямой, для которой справедливо уравнение

$$p = p_0 \left(3 - \frac{V}{V_0} \right), \quad (4.3.20)$$

где p и V — текущие значения давления и объема.

Для теплоемкости газа C на наклонном участке имеем

$$C = C_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (4.3.21)$$

Из уравнения состояния газа с точностью до линейных по Δp и ΔV слагаемых имеем

$$p \Delta V + V \Delta p = R \Delta T. \quad (4.3.22)$$

Из соотношения (4.3.20) следует, что

$$\Delta p = -\frac{p_0}{V_0} \Delta V.$$

Подставляя это значение Δp в (4.3.22), приходим к равенству

$$\Delta V = \frac{R \Delta T}{p - \frac{p_0}{V_0} V} = \frac{R T}{p_0 \left(3 - \frac{2V}{V_0} \right)}.$$

Последнее равенство получается при учете (4.3.22). Подставляя это выражение для ΔV в соотношение (4.3.21), для теплоемкости C на наклонном участке получаем

$$C = C_V + R \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} = R \left(\frac{3}{2} + \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} \right). \quad (4.3.23)$$

Максимальная температура T_1 на наклонном участке определяется с помощью уравнения состояния газа. Сравнивая уравнения $2p_0V_0 = RT$ и $\frac{9}{4}p_0V_0 = RT_1$, получаем, что

$$T_1 = \frac{9}{4}T_0.$$

При повышении температуры от T до T_1 газ получает теплоту, поскольку здесь увеличивается его внутренняя энергия и он совершает положительную работу. В точке с температурой T_1 теплоемкость обращается в бесконечность, а при дальнейшем движении по наклонной прямой становится отрицательной, в чем можно убедиться с помощью выражения (4.3.23). Однако поскольку при этом температура убывает ($\Delta T < 0$), газ продолжает получать теплоту $C\Delta T > 0$.

Так продолжается до той точки, где теплоемкость обращается в нуль. С помощью (4.3.23) определяем, что это происходит в точке на наклонной прямой, соответствующей объему $V_x = 15V_0/8$. При этом давление p_x (в соответствии с (4.3.20)) равно $p_x = 9p_0/8$, а температура равна $T_x = 15T_1/16$. Далее теплоемкость становится положительной, а температура продолжает убывать, поэтому газ отдает теплоту.

Итак, на наклонном участке газ получает теплоту при изменении объема от V_0 до $V_x = 15V_0/8$. Изменение энергии газа на этом участке составляет

$$\Delta U' = C_V (T_x - T) = \frac{3}{2} (p_x V_x - 2p_0 V_0) = \frac{21}{128} p_0 V_0 = \frac{21}{128} RT_0.$$

Работа A' , совершаемая газом на этом участке,

$$A' = \frac{1}{2} (2p_0 + p_x) (V_x - V_0) = \frac{175}{128} RT_0.$$

С помощью первого начала термодинамики для количества теплоты, полученной газом на наклонном участке, получаем

$$Q' = \Delta U' + A' = \frac{49}{128} RT_0. \quad (4.3.24)$$

Полное количество полученной теплоты в соответствии с (4.3.18), (4.3.19) и (4.3.24) рассчитываем из соотношения

$$Q = Q_1 + Q' = \frac{97}{32} RT_0.$$

Полная работа газа за цикл

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0 = \frac{1}{2} RT_0.$$

Тогда для коэффициента полезного действия имеем

$$\eta = \frac{A}{Q} = 16,5 \, \%.$$

Интересно оценить, как изменится ответ, если приближенно считать, что газ получает теплоту на всем наклонном участке цикла. Очевидно, что в этом случае полная полученная теплота Q'' равна

$$Q'' = Q_1 + \frac{1}{2} (2p_0 + p_0) V_0 = 3RT_0,$$

поскольку на всем наклонном участке внутренняя энергия газа не изменяется.

Тогда для коэффициента полезного действия имеем

$$\eta_1 = \frac{A}{Q''} = 16,7 \, \%.$$

Таким образом, эта, на первый взгляд, сложная задача требует для своего решения только использования первого начала термодинамики и уравнения состояния газа с аккуратным анализом процессов на различных стадиях замкнутого цикла.

Задача 4.33. Определите коэффициент полезного действия обратимого цикла, показанного на рисунке, совершаемого с идеальным газом, как функцию максимальной и минимальной температуры в цикле.

Задача похожа на одну из предыдущих, но теперь заданы только максимальная и минимальная температура в цикле, в качестве которых, очевидно, выступают T_3 и T_1 .

Получаемая газом в цикле теплота Q равна

$$Q = C_V (T_2 - T_1) + C_p (T_3 - T_2). \quad (4.3.25)$$

Совершаемая газом за цикл работа A равна

$$A = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_3 - V_1). \quad (4.3.26)$$

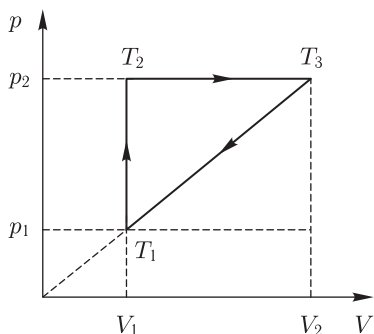


Рис. 4.33.

Уравнение состояния газа приводит к двум равенствам

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{и} \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_2}. \quad (4.3.27)$$

С помощью этих равенств выражение для работы A (4.3.26) приводится к виду

$$A = \frac{R (T_2 - T_1) (T_3 - T_2)}{2 T_2}, \quad (4.3.28)$$

в котором для компактности записи предположено, что цикл происходит с одним молем газа. Теперь для получения ответа нужно выразить промежуточную температуру T_2 , входящую в (4.3.25) и (4.3.28), через

максимальную T_3 и минимальную T_1 температуру. Для этого поделим почленно равенства (4.3.27), тогда получим

$$\frac{p_2}{p_1} \frac{V_1}{V_3} = \frac{T_2^2}{T_1 T_3}.$$

Из графика видно, что $p_2 V_1 = p_1 V_3$, поэтому $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Теперь для коэффициента полезного действия получим

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{R}{2\sqrt{T_1 T_3}} \frac{(\sqrt{T_1 T_3} - T_1)(T_3 - \sqrt{T_1 T_3})}{C_V(\sqrt{T_1 T_3} - T_1) + C_p(T_3 - \sqrt{T_1 T_3})}.$$

Ответ, естественно, можно записать через любую пару из трех величин C_V , C_p и R .

Второе начало термодинамики при решении задач в средней школе используется, как правило, в форме теоремы Карно о максимально возможном коэффициенте полезного действия тепловых двигателей.

Задача 4.34. Как можно эффективнее повысить коэффициент полезного действия теплового двигателя, работающего по циклу Карно: увеличивая температуру нагревателя на заданную величину ΔT при неизменном значении температуры холодильника или понижая температуру холодильника на такую же величину ΔT , но при неизменной температуре нагревателя?

Рассмотрим поочередно оба случая, используя формулу

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Заменяв температуру нагревателя T_1 на $T_1 + \Delta T$, где $\Delta T > 0$, получим, что

$$\eta_1 = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T} = 1 - \frac{T_2}{T_1 + \Delta T}. \quad (4.3.29)$$

При $\Delta T/T \ll 1$ имеем

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1(1 + \Delta T/T_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_1}\right) = \eta + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\Delta T}{T_1}.$$

Теперь заменив температуру холодильника T_2 на $T_2 - \Delta T$, где $\Delta T > 0$, получим

$$\eta = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T)}{T_1} = \eta + \frac{\Delta T}{T_1}. \quad (4.3.30)$$

Видно, что $\eta_1 < \eta_2$, поскольку в выражении для η_1 величина $\Delta T/T_1$ умножается на множитель $T_2/T_1 < 1$.

К ответу можно придти, не делая приведенных вычислений. Понижать температуру холодильника эффективнее, поскольку последовательно понижая T_2 на величину $\Delta T = 1$ К, мы сделаем T_2 равной нулю,

а η — равным единице. Повышая T_1 , мы не получим $\eta = 1$ при любом количестве шагов.

Задача 4.35. Идея динамического отопления, высказанная впервые В. Томсоном, заключается в использовании топлива, предназначенного для отопления, для работы теплового двигателя, приводящего в действие холодильную машину, которая подает теплоту, взятую из окружающей среды, в отопительную систему. Оцените преимущества такого метода по сравнению с непосредственным сжиганием топлива для обогрева.

Рассмотрим вначале упрощенный вариант задачи, считая, что некоторое количество механической (или электрической) энергии E , которую легко превратить в теплоту непосредственно (при этом $Q = E$), или использовать для действия холодильной машины, забирающей теплоту из окружающей среды и передающей ее отопительной системе. Схема действия такого устройства показана на рис. 4.35, а, она представляет собой обращенную тепловую машину.

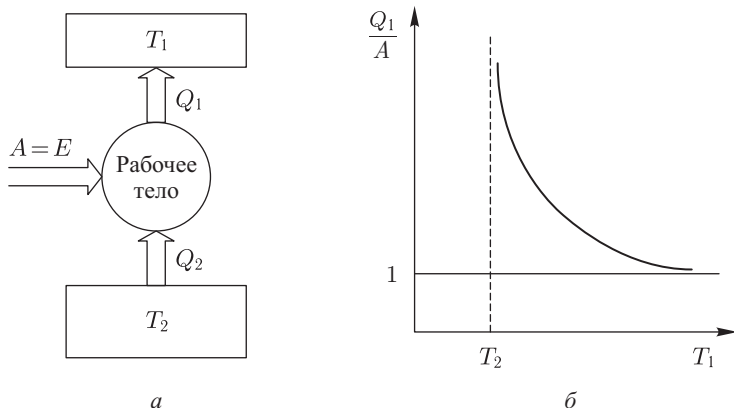


Рис. 4.35, а, б.

Энергия E используется для совершения работы A , в результате чего от холодильника с температурой T_2 отбирается теплота Q_2 , а нагревателю с температурой T_1 ($T_1 > T_2$), являющемуся отапливаемым объектом, передается теплота $Q_1 = E + Q_2$. Считая все процессы обратимыми, имеем

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{E}{Q_1},$$

откуда

$$Q_1 = E \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Получаемая нагревателем теплота Q_1 оказывается больше запаса энергии E , причем тем больше, чем меньше разность температур $T_1 - T_2$. На рис. 4.35, б показана зависимость отношения Q_1/A от температуры нагревателя T_1 (то есть температуры отопительной системы).

Теперь вернемся к исходной задаче. Вместо запаса энергии E имеется топливо, при сжигании которого выделяется теплота Q_1 , которую можно передать непосредственно отопляемому объекту или использовать в тепловом двигателе. Работу, получаемую при действии теплового двигателя, будем использовать для действия холодильной машины. Схема действия такого комбинированного устройства показана на рис. 4.35, в.

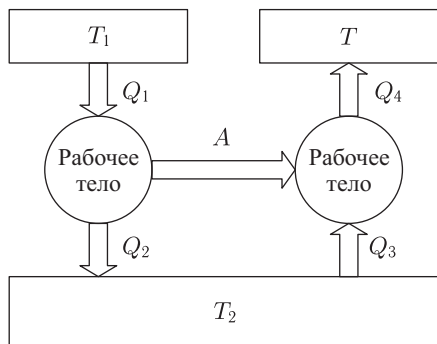


Рис. 4.35, в.

Нагреватель теплового двигателя, где сжигается топливо, находится при температуре T_1 . Температура окружающей среды, которая является холодильником для такого двигателя и из которой черпается теплота для отопляемого объекта, равна T_2 . Температура отопляемого объекта равна T . По смыслу задачи $T_2 < T < T_1$. Считая все процессы обратимыми, для теплового двигателя получаем

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.3.31)$$

Аналогично, для холодильной машины получим

$$\frac{A}{Q_4} = \frac{T - T_2}{T},$$

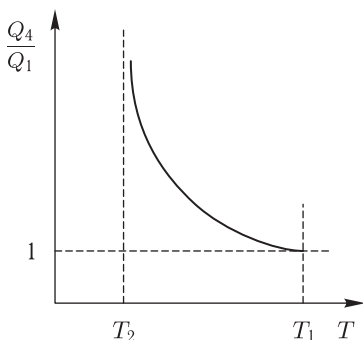
откуда

$$Q_4 = A \frac{T}{T - T_2}.$$

Подставляя сюда соотношение (4.3.31) для A , получаем следующее выражение для полученной отапливаемым объектом теплоты Q_4 :

$$Q_4 = Q_1 \frac{T}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T - T_2} = Q_1 \frac{1 - T_2/T_1}{1 - T_2/T}. \quad (4.3.32)$$

Видно, что при указанном выше двойном неравенстве для температур $Q_4 > Q_1$. На рис. 4.35, z показана зависимость отношения Q_4/Q_1 от температуры T отапливаемого объекта. Если $T < T_1$, график заканчивается при $T = T_1$.

Рис. 4.35, z .

Отметим, что динамическое отопление может действовать и при $T > T_1$, когда температура отапливаемого объекта выше температуры сгорания топлива. Все соотношения для этого случая могут быть записаны аналогично тому, как это сделано для $T < T_1$.

Задача 4.36. *Может показаться, что динамическое отопление можно сделать еще более эффективным, если теплоту Q_2 от теплового двигателя передавать не окружающей среде, а отапливаемому объекту, как показано на рис. 4.35. Выясните этот вопрос.*

Теперь отапливаемый объект будет получать количество теплоты Q , равное сумме Q_2 и Q_4 , $Q = Q_2 + Q_4$. Для теплового двигателя справедливо соотношение

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T}{T_1},$$

откуда

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T}{T_1}. \quad (4.3.33)$$

Для теплоты Q_2 , равной разности между Q_1 и A , имеем

$$Q_2 = Q_1 \frac{T}{T_1}. \quad (4.3.34)$$

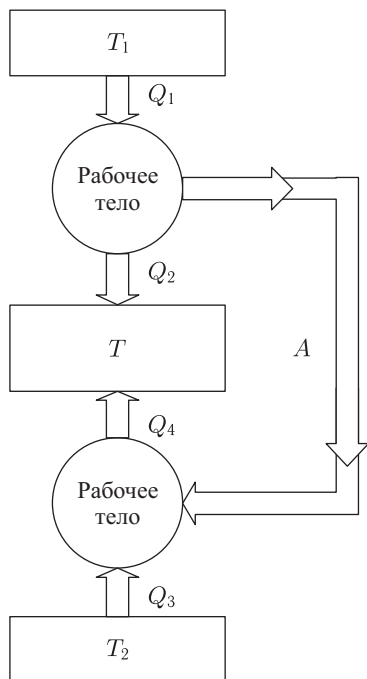


Рис. 4.36.

Для холодильной машины справедливо равенство

$$\frac{A}{Q_4} = \frac{T - T_2}{T},$$

откуда

$$Q_4 = A \frac{T}{T - T_2} = Q_1 \frac{T}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T}{T - T_2}. \quad (4.3.35)$$

Складывая выражения (4.3.34) и (4.3.35) для Q_2 и Q_4 , находим полную теплоту Q , полученную отапливаемым объектом:

$$Q = Q_1 \left(\frac{T}{T_1} + \frac{T}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T}{T - T_2} \right) = Q_1 \frac{T}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T - T_2},$$

то есть то же самое выражение, что и (4.3.32).

Доказать, что использование второй схемы не может привести к повышению эффективности устройства, можно и без проведения вычислений. Необходимые рассуждения приведены в книге [3].

Задача 4.37. *Может ли для какого-нибудь вещества кривая изотермы дважды пересекаться с кривой адиабаты?*

Предположим, что вещество с такими свойствами существует и на рис. 4.37 изображен такой случай. Тогда можно осуществить тепловой двигатель, который будет получать теплоту, расширяясь по изотерме от состояния 1 до состояния 2, и, не отдавая теплоты при сжатии по адиабате, возвращаться в исходное состояние 1.

На этом замкнутом цикле будет совершаться работа, равная площади, ограниченной графиком цикла на pV -диаграмме, которая в то же время будет равна полученному на изотерме количеству теплоты (на основании первого начала термодинамики). Цикл можно повторить, и получается тепловой двигатель, который всю полученную теплоту превращает в работу, ничего не отдавая другим телам. Такое невозможно вследствие второго начала термодинамики. Поэтому двукратное пересечение изотермы и адиабаты невозможно.

Отметим, что при незамкнутых циклах возможно превращение всего полученного тепла в работу. Так происходит, например, при расширении идеального газа по изотерме, без возвращения в исходное состояние.

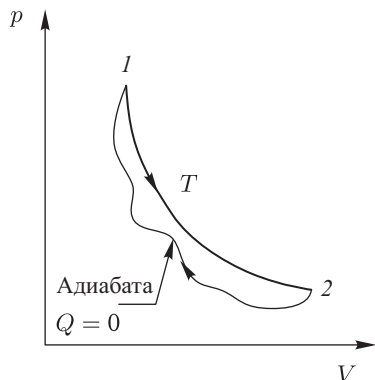


Рис. 4.37.

4.4. Кинетическая теория вещества

Задача 4.38. Определите по порядку величины максимальную скорость, с которой артиллерийский снаряд может вылететь из ствола орудия.

Снаряд в канале ствола разгоняется под действием пороховых газов, образующихся при быстром, взрывоподобном сгорании пороха. Если предположить, что скорость снаряда становится равной или близкой к характерной скорости движения молекул газа, то молекулы перестанут разгонять снаряд. Поэтому по порядку величины скорость снаряда оказывается сравнимой со скоростью теплового движения молекул. Эта скорость пропорциональна $\sqrt{T/m}$, где T — температура газа, а m — масса молекулы. Отсюда ясно, какой порох является более предпочтительным.

Задача 4.39. В цилиндре, закрытом подвижным поршнем, находится 2 моля газа при нормальных условиях. Объем газа увеличили в $k = 10$ раз, а затем газ изобарически нагрели до температуры $t = 127^\circ\text{C}$. Определите число n молекул газа в единице объема в конечном состоянии.

Введем следующие обозначения: $V_0 = \nu V_{0\mu}$ — объем газа в начальном состоянии, ν — количество вещества газа, $V_{0\mu}$ — молярный объем газа при нормальных условиях, V — объем газа в конечном состоянии при температуре T .

Поскольку число молекул газа постоянно, то концентрация газа n в конечном состоянии выражается через концентрацию n_0 при нормальных условиях соотношением

$$n = n_0 \frac{V_0}{V}, \quad (4.4.1)$$

где

$$n_0 = \frac{N_A}{V_{0\mu}}. \quad (4.4.2)$$

Если начальный объем газа V_0 увеличили в k раз при постоянной температуре, равной начальной T_0 , то конечное давление p будет в k раз меньше нормального атмосферного давления p_0 , $p = p_0/k$. С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона определяем объем V газа в конечном состоянии после изобарического нагревания:

$$\frac{p_0}{k} V = \nu RT. \quad (4.4.3)$$

Используя выражение $p_0 = RT/V_{0\mu}$, получаем

$$V = \frac{\nu k T}{T_0} V_{0\mu}.$$

Подставляя это выражение для V в соотношение (4.4.1), с учетом (4.4.2) находим, что

$$n = \frac{N_A T_0}{k V_{0\mu} T}. \quad (4.4.4)$$

Используя значения N_A , T_0 и $V_{0\mu}$, получаем $n = 1,83 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$.

Ответ не зависит от числа молей газа в цилиндре. Этот ответ можно получить короче и выразить через нормальное атмосферное давление p_0 . Действительно, записывая соотношение (4.4.1) в виде

$$n = \frac{\nu N_A}{V}$$

и подставляя сюда V из (4.4.3), получаем

$$n = \frac{N_A p_0}{k R T},$$

что эквивалентно соотношению (4.4.4).

Решение задач данного раздела целесообразно проводить с использованием численных данных фигурирующих параметров, поскольку это способствует не только развитию умения решения задач, но и расширяет объем получаемой информации.

Задача 4.40. Для газа аргона удельная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_V = 314 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Определите, чему равна масса атома аргона.

Аргон относится к инертным газам и существует в атомарном состоянии. Поэтому его молярная теплоемкость C_V с хорошей точностью может аппроксимироваться теплоемкостью идеального одноатомного газа:

$$C_V = \frac{3}{2} R.$$

Удельная теплоемкость получается делением C_V на молярную (в данном случае атомную) массу аргона μ , для которой справедливо соотношение $\mu = m N_A$, где m — масса одного атома. В результате получаем

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{R}{m N_A},$$

откуда

$$m = \frac{3}{2} \frac{R}{c_V N_A}.$$

Подставляя численные значения универсальной газовой постоянной R , числа Авогадро N_A и удельной теплоемкости c_V , получаем: $m = 6,6 \times 10^{-26} \text{ кг}$.

Задача 4.41. Частички табачного дыма, взвешенные в воздухе, медленно перемещаются со среднеквадратичной скоростью $v = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$. Температура воздуха равна $T = 295 \text{ К}$. Какова масса одной частички?

Используя выражение для среднеквадратичной скорости,

$$\bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (4.4.5)$$

получаем для массы частички m значение

$$m = 3kT/\bar{v}^2 = 5,1 \cdot 10^{-16} \text{ кг.}$$

При решении этой задачи предполагается, что для среднеквадратичной скорости частичек табачного дыма справедливо соотношение (4.4.5), которое можно получить из максвелловского распределения по скоростям в газе. Это, строго говоря, позволяет говорить только об оценке значения массы частички по порядку величины.

Задача 4.42. *Среднеквадратичная скорость молекул идеального газа $\bar{v} = 463$ м/с. Давление и объем газа постоянны, а количество молекул увеличивается вдвое. Как при этом изменяется среднеквадратичная скорость?*

При постоянных объеме и давлении увеличение вдвое количества молекул приводит к такому же уменьшению температуры. Действительно, с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона имеем

$$pV = \nu RT = 2\nu RT_1,$$

откуда $T_1 = T/2$.

Для среднеквадратичных скоростей при температурах T и T_1 справедливы равенства

$$\langle v^2 \rangle_1 = \frac{3kT}{m}, \quad \langle v^2 \rangle_2 = \frac{3kT}{2m}.$$

Разделив эти равенства почленно, получаем

$$\frac{\langle v^2 \rangle_1}{\langle v^2 \rangle_2} = 2,$$

откуда:

$$\bar{v}_2 = \sqrt{\langle v^2 \rangle_2} = \sqrt{\frac{\langle v^2 \rangle_1}{2}} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{2}} \approx 328 \text{ м/с.}$$

Использование основ кинетической теории позволяет решать задачи с астрофизическим содержанием. Приведем примеры.

Задача 4.43. *Температура T поверхности Солнца составляет около 6000 К. При такой температуре все вещества находятся в газообразном состоянии. Из спектрального анализа следует, что там присутствует большинство химических элементов. Каков спектр значений среднеквадратичных скоростей, начиная от атомарного водорода ($\mu = 1$ г/моль) до урана ($\mu = 238$ г/моль)?*

Расчет этих скоростей производится с помощью соотношения

$$\bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где масса атома дается выражением

$$m = \frac{\mu}{N_A}.$$

Окончательно имеем

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{\mu}}.$$

Расчет дает следующие цифры:

$$\bar{v}_H \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}, \quad \bar{v}_U \approx 790 \text{ м/с}.$$

Задача 4.44. Считается, что все молекулы определенного газа покинут атмосферу планеты, если их среднеквадратичная скорость больше $1/6$ второй космической скорости для этой планеты. На Марсе вторая космическая скорость составляет $v_{II} = 5,0 \text{ км/с}$. Температура атмосферы вблизи поверхности около 0°C . Могут ли в атмосфере Марса присутствовать молекулы H_2 , O_2 , CO_2 ?

Одна шестая второй космической скорости составляет 833 м/с . Среднеквадратичные скорости рассчитываются по формуле

$$\bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{\mu}}.$$

Расчет при температуре $T = 273 \text{ К}$ дает следующие цифры:

$$\bar{v}_{\text{H}_2} = 1846 \text{ м/с}, \quad \bar{v}_{\text{O}_2} = 461 \text{ м/с}, \quad \bar{v}_{\text{CO}_2} = 393 \text{ м/с}.$$

Поэтому, в соответствии с указанным критерием, молекулы O_2 , CO_2 могут присутствовать в атмосфере Марса, а молекулы H_2 не могут.

Задача 4.45. Температура T Титана, спутника Сатурна, составляет примерно 100 К . Какова наименьшая масса молекулы газа, который может присутствовать в атмосфере Титана? Могут ли присутствовать молекулы азота N_2 ? Масса Титана составляет $M = 1,35 \cdot 10^{23} \text{ кг}$, его радиус $R = 2575 \text{ км}$.

Вторая космическая скорость для Титана равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 2,6 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Одна шестая этой величины составляет $4,4 \cdot 10^5$ м/с. Среднеквадратичная скорость молекул газа, присутствующего в атмосфере Титана, не может превышать этого значения. Из соотношения

$$\bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \leq \frac{1}{6} v_{II}$$

получаем минимальную массу молекулы:

$$m_{\min} = 54 \frac{kTR}{GM} \approx 2,1 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Молекулы азота N_2 , имеющие массу

$$m = \frac{\mu}{N_A} \approx 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

могут присутствовать в атмосфере Титана.

К следующему разделу обычно относят те задачи, где рассматривается влажность воздуха. Приведем характерный пример.

Задача 4.46. Давление насыщающего водяного пара при температуре $t = 36^\circ\text{C}$ составляет $p = 44,6$ мм. рт. ст. Какова масса одного кубического метра влажного воздуха, если относительная влажность воздуха равна 80 %, а атмосферное давление $p_0 = 1$ атм?

Полное давление влажного воздуха, равное p_0 , складывается из давления водяного пара $p' = 0,8p = 35,7$ мм. рт. ст. и давления воздуха

$$p_0 - p' = 724,3 \text{ мм. рт. ст.}$$

Соответственно для массы пара $m_{\text{п}}$ и массы воздуха в одном кубическом метре получаем

$$m_{\text{п}} = \frac{\mu_{\text{п}} p' V}{RT} = 33,4 \text{ г,}$$

$$m_{\text{в}} = \frac{\mu_{\text{в}} (p_0 - p') V}{RT} = 1090 \text{ г.}$$

Полная масса влажного воздуха в 1 м^3 равна

$$m = m_{\text{в}} + m_{\text{п}} = 1123 \text{ г.}$$

Глава 5

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

В задачах данного раздела используются следующие основные соотношения. Выражения для релятивистской энергии и импульса записываются в виде

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.1)$$

где m_0 — масса покоя частицы, то есть масса в той системе отсчета, где объект покоится.

Вместо соотношений (5.1) могут использоваться альтернативные выражения, которые можно получить с помощью (5.1),

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad \mathbf{p} = \frac{E \mathbf{v}}{c^2}, \quad E_0 = m_0 c^2, \quad (5.2)$$

где E_0 — энергия покоя частицы.

Компактность математических преобразований при решении задач данного раздела в значительной степени определяется удачным выбором исходных соотношений (5.1) или (5.2). В некоторых случаях этот выбор однозначно предопределяется объектами, фигурирующими в задаче.

Выражения (5.1) не применимы к объектам, движущимся со скоростями света — фотонам и нейтрино, у которых масса покоя m_0 равна нулю. Для таких объектов соотношения (5.2) принимают простой вид

$$E = pc, \quad v = c. \quad (5.3)$$

Вместе с тем, для них возможно введение понятия релятивистской массы с помощью соотношения

$$mc^2 = h\nu.$$

При этом соотношение между массой и энергией имеет вид

$$E = mc^2. \quad (5.4)$$

Это соотношение совместимо с первым из равенств (5.1), если для частиц и тел с отличной от нуля массой покоя m_0 ввести понятие релятивистской массы m :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.5)$$

При этом второе из равенств (5.1) имеет формально нерелятивистский вид,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

В области квантовых явлений основными являются соотношения

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

или

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right). \quad (5.6)$$

Левые части этих равенств характеризуют квантовый объект как частицу с энергией E и импульсом $\mathbf{p}$. Правые части равенств характеризуют волновые свойства объектов — частоту ν (или циклическую частоту $\omega = 2\pi\nu$) и длину волны λ . Подчеркнем универсальность соотношений (5.6). При различных превращениях могут возникать как объекты с не равной нулю массой покоя, которые движутся со скоростью меньшей скорости света и при наличии электрического заряда испытывать влияние электрического и магнитного полей. Однако во всех случаях соотношения (5.6) являются справедливыми.

В некоторых задачах используются соотношения неопределенностей для одновременно изменяющихся физических величин, например:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h. \quad (5.7)$$

Отметим, что при рассмотрении процессов, происходящих во внутриатомных и внутриядерных явлениях, можно постоянную Планка h заменить на приведенную постоянную $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. С помощью соотношений (5.7) можно получить соотношения между другими величинами, например, соотношение неопределенностей между числом фотонов и их фазами.

5.1. Релятивистская физика макроскопических тел

В школьном курсе физики не изучаются преобразования Лоренца, однако, рассматривая простейшие кинематические явления, можно продемонстрировать относительный характер времени и размеров макроскопических тел. Рассмотрим задачу.

Задача 5.1. *Опираясь на тот факт, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета, покажите относительный характер одновременности двух событий в разных системах.*

Наиболее просто это показать, рассмотрев проход сигналов от точечного источника в две равноудаленные от него точки в разных системах отсчета. Пусть имеется некоторая «неподвижная» система отсчета K и движущаяся относительно нее с постоянной скоростью вдоль оси X система K' , как показано на рис. 5.1.

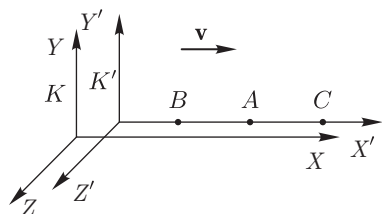


Рис. 5.1.

Пусть в системе K' есть три неподвижных в ней точки A , B и C , расположенные на одной прямой (вдоль оси X'), причем точки B и C равноудалены от точки A . Свет, испущенный из точки A , достигает точек B и C одновременно с точки зрения наблюдателя в системе K' . Но с точки зрения наблюдателя в системе K свет сначала

придет в точку B и лишь спустя некоторое время достигнет точки C . Действительно, скорость света одинакова во всех направлениях и в системе отсчета K , но точка B движется навстречу свету со скоростью v , а точка C с той же скоростью, но по направлению от посланного в нее света. В результате свету придется пройти больший путь до попадания в точку C , чем до попадания в точку B . Итак, одновременные в системе K' события — приход света, испущенного из A в точки B и C , — не будут одновременными в системе отсчета K .

Очень полезными для активного усвоения материала представляются задачи, в которых устанавливается соотношение между промежутками времени в различных инерциальных системах отсчета между двумя событиями. То же самое справедливо относительно соотношений между длинами протяженного твердого тела в различных системах.

Задача 5.2. *Определить соотношение между промежутками времени, происходящими в системах K и K' (см. рис. 5.2, а) между двумя следующими событиями: в точке A ракеты происходит вспышка света; после отражения от зеркала свет возвращается в точку A . Система K' связана с ракетой, движущейся со скоростью v вдоль оси X в системе K .*

В соответствии с принципом относительности расстояние между точкой A и зеркалом одинаково в обеих системах K и K' . Для наблюдателя в системе отсчета K' промежуток времени между двумя

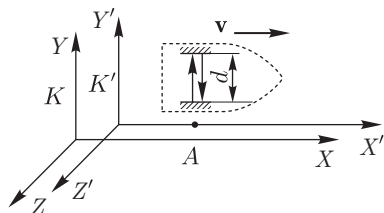


Рис. 5.2, а.

рассматриваемыми событиями $\Delta t'$ определяется соотношением

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}, \quad (5.1.1)$$

поскольку, двигаясь до зеркала и обратно, свет проходит путь $2d$ со скоростью c . Но для наблюдателя в системе K картина распространения света выглядит иначе; пройденный светом путь определяется длиной ломаной линии (см. рис. 5.2, б).

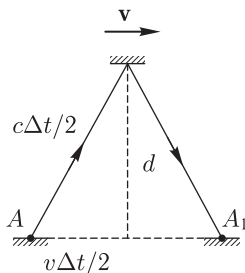


Рис. 5.2, б.

Действительно, пока свет распространяется до зеркала и обратно, точка A перемещается со скоростью v , так что возвращается свет уже в новое положение точки A , в точку A_1 . Поскольку и в этой системе отсчета скорость света равна c , то с помощью теоремы Пифагора находим

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2, \quad (5.1.2)$$

где Δt — промежуток времени в системе отсчета K между теми же событиями. Отсюда находим

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\gamma, \quad (5.1.3)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Сравнивая (5.1.1) и (5.1.3), видим, что

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.4)$$

Поскольку всегда $\gamma > 1$, то промежуток времени в системе отсчета K больше промежутка времени в системе K' , где оба эти события (уход и приход света) происходят в одной и той же точке пространства.

Задача 5.3. Система отсчета K' движется со скоростью v вдоль системы K . Какой будет представляться наблюдателю в системе K длина стержня, неподвижного в системе K' , если в системе K' его длина равна l_0 .

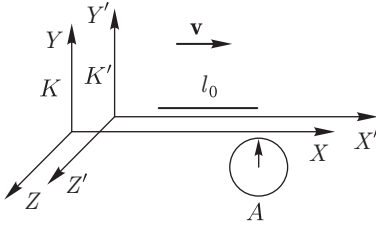


Рис. 5.3.

Судить о длине стержня в системе K можно следующим образом. Измерим промежуток времени Δt между двумя событиями: прохождении начала и конца стержня через точку A , неподвижную в системе K . Очевидно, что длина l стержня в системе K дается выражением

$$l = v \Delta t'. \quad (5.1.5)$$

В системе K' промежуток времени между этими же событиями равен $\Delta t'$, причем в этой системе отсчета точка A движется вдоль стержня налево с такой же скоростью v . Поэтому в системе K' длина стержня l_0 может быть представлена как

$$l_0 = v \Delta t'. \quad (5.1.6)$$

Величины Δt и $\Delta t'$ здесь связаны соотношением

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

поскольку промежуток времени меньше в той системе отсчета, где оба события происходят в одной точке пространства. Сравнивая соотношения (5.1.5) и (5.1.6), с учетом соотношения между Δt и $\Delta t'$ получим

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.1.7)$$

Это означает, что движущееся относительно неподвижного наблюдателя тело «сокращается» в направлении своего движения.

Задача 5.4. *Время жизни неподвижного мезона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с меньше времени, необходимого для прохождения мезона, зарегистрированного на большой высоте, до поверхности Земли. Между тем наблюдения показывают, что такие мезоны могут достигать этой поверхности. Объясните этот эффект с точки зрения наблюдателя, находящегося на земной поверхности, и с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно мезона, то есть летящего вместе с ним по направлению к Земле.*

При достаточно большой, сравнимой со скоростью света c скорости мезона $v = 0,998c$ для наблюдателя, стоящего на Земле, промежуток времени между регистрацией мезона на большой высоте и его приходом к поверхности Земли, измеренный по земным часам, в соответствии с формулой (5.1.4), равный

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 35 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

всегда больше того промежутка времени в системе, где мезон неподвижен. Поэтому, если мезон все-таки достиг поверхности Земли, это означает, что по его «часам» время движения к Земле оказалось меньше времени τ_0 и он не успел распасться. Если с самого начала рассматривать процесс в системе отсчета, где мезон неподвижен, то в этой системе отсчета Земля летит навстречу мезону, и, соответственно, сокращается расстояние до Земли по сравнению с этим же расстоянием, но измеренным с неподвижной Земли. Времени τ_0 может оказаться достаточно для преодоления этого «сокращенного» расстояния.

Задача 5.5. *Выведите преобразования Лоренца, пользуясь постулатами специальной теории относительности и требуя, чтобы при малых скоростях v относительного движения двух инерциальных систем отсчета K и K' эти преобразования переходили в преобразования Галилея,*

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t',$$

а обратные преобразования имели вид:

$$x' = x - vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (5.1.8)$$

Необходимость обобщения преобразований Галилея в случае релятивистского движения очевидна из первого соотношения (5.1.8). Действительно, рассматривая распространение света с помощью первого и последнего из соотношений (5.1.8) получаем

$$c = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t} = \frac{x' + vt'}{t'} = c + v.$$

Поскольку при малых скоростях преобразования Лоренца должны переходить в преобразования Галилея (5.1.8), то попробуем записать их в виде

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (5.1.9)$$

где множитель γ зависит от скорости, но не может зависеть от координат. Кроме того, этот множитель должен стремиться к единице при $\frac{v}{c} \rightarrow 0$.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' такие, что при $t = t' = 0$ начала координат систем K и K' совпадают. Пусть в этот момент из общего начала координат испускается свет в направлении осей x и x' . Тогда, в силу того, что уравнения движения одинаковы в обеих системах отсчета, справедливы равенства

$$x = ct, \quad x' = ct'. \quad (5.1.10)$$

Подставляя соотношения (5.1.10) в (5.1.9), получаем

$$ct = \gamma(c + v)t', \quad ct' = \gamma(c - v)t.$$

Перемножив эти равенства почленно, найдем, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.11)$$

Видно, что γ удовлетворяет сформулированным выше требованиям. Теперь подставим первое из равенств (5.1.9) во второе:

$$x' = \gamma(\gamma(x' + vt') - vt).$$

Решая полученное уравнение относительно t с учетом соотношения (5.1.11) для γ , получаем

$$t = \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2} \right). \quad (5.1.12)$$

В силу принципа относительности координаты, перпендикулярные относительной скорости систем K и K' , одинаковы в обеих системах, иначе будет нарушено равноправие этих инерциальных систем: $y = y'$, $z = z'$. Таким образом, мы получаем формулы преобразований Лоренца в виде

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2} \right).$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2} \right).$$

С помощью преобразований Лоренца можно получить решение двух предыдущих задач. Верно и обратное: воспользовавшись результатами двух последних задач, полученными без преобразований Лоренца, можно вывести последние.

Задача 5.6. Выведите преобразования Лоренца, используя соотношения (5.1.7), полученные с помощью постулатов специальной теории относительности.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: систему K и движущуюся относительно нее со скоростью v вдоль оси X систему K' . При $t = t' = 0$ начала координатных систем, соответствующих K и K' , совпадают.

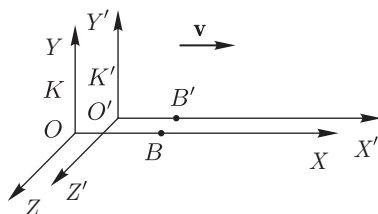


Рис. 5.6.

Пусть отрезок OB неподвижен в системе K . Тогда координата x точки B характеризует длину l_0 отрезка OB . Длина l этого отрезка в системе K' , где измерение производится в момент времени t' , есть, очевидно,

$$l = x' + vt', \quad (5.1.13)$$

поскольку при $t' = 0$ точки O и O' совпадают. Учитывая соотношение (5.1.7) и равенство $l_0 = x$, приходим к равенству

$$x' + vt' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

откуда

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.14)$$

Опираясь на принцип относительности, заменяем $v \rightarrow -v$ и $x, t \leftrightarrow x', t'$ и получаем формулу обратного преобразования:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.15)$$

Разумеется, можно было рассмотреть отрезок $O'B'$, неподвижный в системе K' , и сравнить длины этого отрезка в K и K' . Тогда длина l_0 — это длина отрезка $O'B'$ в системе K' , где отрезок неподвижен. С помощью соотношений (5.1.14) и (5.1.15) можно установить связь между временами t и t' одного и того же события, рассматриваемого в разных системах отсчета. Подставляя x' из (5.1.15) в (5.1.14), получаем

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.16)$$

Подставляя x из (5.1.14) в (5.1.15), приходим к равенству

$$t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1.17)$$

Учитывая, что $y = y'$ и $z = z'$, получаем преобразования Лоренца в таком же виде, как и в предыдущей задаче.

Задача 5.7. Ближайшая к Солнечной системе звезда α Центавра находится на расстоянии, равном примерно 4 световым годам. Каким будет это расстояние с точки зрения пассажиров космического корабля, покидающего Землю со скоростью v , равной половине скорости света? Сколько времени займет путешествие на эту звезду по часам космонавтов? Сколько времени пройдет при этом по земным часам?

В системе отсчета, связанной с космическим кораблем (где корабль неподвижен), звезда бежит навстречу кораблю со скоростью $v = \frac{c}{2}$. Поэтому в этой системе отсчета расстояние l до звезды будет меньше, чем расстояние l_0 в системе отсчета, связанной с Землей, где это расстояние «неподвижно». Поэтому с помощью соотношения (5.1.7) находим

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,46 \text{ св. лет.}$$

По часам космонавтов путешествие займет промежуток времени

$$t = \frac{l}{v} \approx 6,92 \text{ года.}$$

По часам, находящимся на Земле, пройдет больше времени:

$$t_0 = \frac{l_0}{v} \approx 8 \text{ лет.}$$

Решая кинематические задачи для релятивистского движения важно правильно определить, какую из рассматриваемых систем отсчета вы считаете «неподвижной». Тем самым устанавливается принадлежность рассматриваемых объектов (расстояний, промежутков времени) к «подвижной» или «неподвижной» категориям, что позволяет правильно соотнести эти объекты с соотношениями (5.1.4) и (5.1.7). Так, в разобранный задаче, считая Землю неподвижной, мы тем самым считаем «неподвижным» расстояние от Земли до звезды, которое в силу огромного расстояния между этими космическими объектами считается неизменным. Считая неподвижным космический корабль, мы вынуждены считать, что «стержень», характеризующий расстояние от Земли до звезды, движется, поскольку теперь звезда приближается к космическому кораблю.

Решение динамических задач, за исключением некоторых простых случаев, на школьном уровне возможно только с использованием законов сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 5.8. На неподвижное тело с массой m_0 налетает тело с такой же массой, движущееся со скоростью v , и слипается с ним. Определите массу образовавшегося тела M и скорость v_1 , с которой оно движется.

Совершенно очевидно, что в рассматриваемом процессе выполняются законы сохранения энергии и импульса, которые можно записать в следующем виде:

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (5.1.18)$$

Именно при таком выборе формул для энергии и импульса релятивистских объектов необходимые алгебраические преобразования оказываются наиболее простыми. Вводя обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}},$$

перепишем уравнения (5.1.18) в компактном виде:

$$m_0 c^2 (1 + \gamma) = M c^2 \gamma_1, \quad m_0 v \gamma = M v_1 \gamma_1. \quad (5.1.19)$$

Разделив почленно второе из равенств (5.1.19) на первое, находим скорость v_1 образовавшегося тела:

$$v_1 = v \frac{\gamma}{\gamma + 1}. \quad (5.1.20)$$

Выражая M из второго уравнения (5.1.19) и подставляя в получившееся выражение v_1 из формулы (5.1.20), получаем

$$M = \frac{m_0 v \gamma}{v_1 \gamma_1} = m_0 v \gamma \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)^2} \cdot (1 + \gamma)}{v \gamma}.$$

Теперь остается только подставить сюда соотношение

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2},$$

полученное из определения γ . В результате найдем, что

$$M = m_0 \sqrt{2(1 + \gamma)}.$$

Незначительное на первый взгляд изменение условия этой задачи приводит к другому выбору исходных уравнений для получения ответа наиболее компактным способом.

Задача 5.9. На неподвижное тело с массой m_0 налетает тело с такой же массой, кинетическая энергия которого равна E_k , и слипается с ним. Определите массу образовавшегося тела M и скорость v , с которой оно движется.

Запись законов сохранения энергии и импульса в виде (5.1.18) теперь нецелесообразна, потому что не задана скорость налетающего тела. Более удобной будет система уравнений (5.2), в которую входят сохраняющиеся в рассматриваемом процессе энергия системы E и ее импульс p . До столкновения полная энергия равна:

$$E = 2m_0 c^2 + E_k.$$

После столкновения ее удобно записать в виде

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}.$$

Закон сохранения энергии приводит к равенству

$$\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4} = 2m_0 c^2 + E_k. \quad (5.1.21)$$

Входящее сюда произведение $p^2 c^2$ удобно найти, учитывая, что импульс образовавшегося тела p равен импульсу налетающего тела, и используя для его энергии выражение $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$. Тогда для его кинетической энергии E_k имеем

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2.$$

Уединяя входящий в это выражение квадратный корень и возводя обе части получившегося равенства в квадрат, получаем выражение

$$p^2 c^2 = E_{\kappa}^2 + 2E_{\kappa} m_0 c^2. \quad (5.1.22)$$

Подставляя это выражение в соотношение (5.1.21), получаем уравнение для определения M . Решая его, находим массу покоя образовавшегося тела, а именно:

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{2m_0 (2m_0 c^2 + E_{\kappa})}.$$

Для нахождения скорости его движения воспользуемся второй формулой (5.2) и соотношением (5.1.22). Имеем

$$p = \frac{(2m_0 c^2 + E_{\kappa}) v}{c^2} = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa}^2 + 2E_{\kappa} m_0 c^2}.$$

Отсюда для v находим

$$v = c \sqrt{\frac{E_{\kappa}}{2m_0 c^2 + E_{\kappa}}}.$$

Как видно, при решении задачи в такой формулировке можно обойтись без использования формул, содержащих релятивистский корень.

Задача 5.10. *В ускорителях разогнанные частицы сталкиваются с другими частицами, в результате чего может происходить образование новых частиц. Какая часть энергии налетающей частицы может быть использована для рождения новых частиц при ее столкновении с такой же неподвижной частицей?*

В нерелятивистском случае ответ прост. Используя закон сохранения импульса, нетрудно убедиться, что при неподвижной мишени для реакции образования новых частиц может быть использована только половина кинетической энергии налетающей частицы. В релятивистском случае дело обстоит сложнее, в чем также можно убедиться с помощью законов сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим столкновение релятивистской частицы с массой покоя m_0 с такой же неподвижной частицей. Обозначим через ΔE энергию, которая может использоваться для рождения новых частиц, и через m — полную массу покоя системы после столкновения. Очевидно, что ΔE может быть представлена как увеличение энергии покоя частиц, которое произошло в результате столкновения:

$$\Delta E = mc^2 - 2m_0 c^2. \quad (5.1.23)$$

Найдем массу покоя m частиц системы после столкновения с помощью законов сохранения энергии и импульса. Энергию налетающей

частицы можно представить как сумму энергии покоя и кинетической энергии $E_{\text{к}}$:

$$E = m_0 c^2 + E_{\text{к}}. \quad (5.1.24)$$

Импульс p налетающей частицы можно найти с помощью соотношения

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (5.1.25)$$

С помощью (5.1.24) и (5.1.25) находим

$$p^2 = \left(\frac{m_0 c^2 + E_{\text{к}}}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2. \quad (5.1.26)$$

Полная энергия системы E_1 после столкновения, равная полной энергии до столкновения, может быть представлена в виде

$$E_1 = 2m_0 c^2 + E_{\text{к}}. \quad (5.1.27)$$

До столкновения частица-мишень покоилась, поэтому импульс образовавшейся системы равен импульсу p налетающей частицы. С другой стороны, этот импульс p можно выразить через энергию E_1 системы после столкновения с помощью соотношения

$$E_1^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (5.1.28)$$

Используя (5.1.27) и (5.1.28), получаем

$$p^2 = \left(\frac{2m_0 c^2 + E_{\text{к}}}{c} \right)^2 - m^2 c^2. \quad (5.1.29)$$

Приравнивая правые части выражений (5.1.26) и (5.1.29) для импульса p , получаем равенство

$$m = 2m_0 \left(1 + \frac{E_{\text{к}}}{2m_0 c^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1.30)$$

Используя соотношения (5.1.30) и (5.1.23), получаем для искомой величины ΔE выражение

$$\Delta E = 2m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{E_{\text{к}}}{2m_0 c^2}} - 1 \right). \quad (5.1.31)$$

В случае нерелятивистской налетающей частицы, когда $E_{\text{к}} \ll m_0 c^2$, выражение (5.1.31) дает приведенный выше результат $\Delta E = E_{\text{к}}/2$. Действительно, используя приближенную формулу

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}, \quad a \ll 1,$$

убеждаемся в справедливости сделанного утверждения. В ультрарелятивистском случае, когда $m_0c^2 \ll E_k$, можно пренебречь обеими единицами в правой части выражения (5.1.31). При этом получим

$$\Delta E \approx \sqrt{2m_0c^2 E_k}. \quad (5.1.32)$$

Таким образом, с ростом роли релятивистских эффектов уменьшается доля кинетической энергии разгоняемых частиц, которая может быть использована для реакции в ускорителе с неподвижной мишенью.

Задача 5.11. Как связаны между собой кинетическая энергия E_k частицы в ускорителе с неподвижной мишенью и кинетическая энергия E'_k в ускорителе на встречных пучках, при которых получается одинаковая энергия ΔE , способная превратиться в энергию покоя рождающихся частиц?

При столкновении двух движущихся навстречу друг другу частиц с одинаковыми по модулю импульсами в энергию покоя может превратиться вся кинетическая энергия обеих частиц,

$$\Delta E = 2E_k. \quad (5.1.33)$$

В ускорителе с неподвижной мишенью величины ΔE и E_k связаны соотношением (5.1.31). Подставляя в него выражение (5.1.33), приходим к равенству

$$E_k = 2m_0c^2 \left(\left(\frac{E'_k}{m_0c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right). \quad (5.1.34)$$

В ультрарелятивистском случае, когда $m_0c^2 \ll E'_k$, связь между E_k и E'_k дается выражением

$$E_k = \frac{2E'^2_k}{m_0c^2},$$

Отметим, что его можно получить как из (5.1.34), так и из (5.1.32). Легко видеть, что выигрыш в энергии при использовании ускорителей на встречных пучках особенно велик для легких частиц (при одинаковой кинетической энергии E'_k).

5.2. Квантовые явления

Задача 5.12. С помощью соотношения неопределенностей оцените энергию основного состояния атома водорода и размер атома в этом состоянии, не используя классических представлений о характере движения электрона вокруг ядра.

Воспользуемся выражением для энергии электрона, состоящей из кинетической части и энергии электростатического взаимодействия с ядром, которое считаем неподвижным,

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \quad (5.2.1)$$

Потенциальная энергия не зависит от ориентации атома и определяется только расстоянием r от ядра атома. Импульс электрона p может быть направлен произвольным образом, а различные его компоненты могут иметь различные значения, в том числе и нулевые, кроме одной компоненты, направленной вдоль радиуса. Действительно, согласно соотношению неопределенностей,

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \geq \hbar, \quad (5.2.2)$$

где Δr и Δp_r — неопределенности значений r и компоненты импульса Δp_r , направленной по радиусу. Отсюда видно, что ни Δr , ни Δp_r не могут обратиться в нуль, а значения r и p_r , входящие в это соотношение, не могут быть меньше величин Δr и Δp_r , соответственно. Поэтому для минимальных допустимых значений r и p справедливо соотношение

$$r \cdot p \approx \hbar. \quad (5.2.3)$$

Основному состоянию атома соответствует минимальная возможная энергия, определяемая соотношением (5.2.1). При $r \rightarrow 0$ энергия электрона в атоме неограниченно возрастает по модулю, но электрон не может «упасть» на ядро, поэтому атом должен иметь конечный размер. Для оценки размера атома и его минимальной энергии в основном состоянии выразим r из (5.2.3) и подставим в (5.2.1):

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar}. \quad (5.2.4)$$

Исследовать выражение (5.2.4) на экстремум можно методами элементарной математики. Дополнив это выражение до полного квадрата разности, получим

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar} + \frac{me^4}{2\hbar^2} - \frac{me^4}{2\hbar^2} = \left(\frac{p}{\sqrt{2m}} - \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \right)^2 - \frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (5.2.5)$$

Отсюда следует, что минимальное значение E_0 равно

$$E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad (5.2.6)$$

причем оно реализуется при значении p_0 , равном

$$p_0 = \frac{me^2}{\hbar}.$$

Соответствующее такому значению p_0 значение радиуса r_0 , как следует из (5.2.3), равно

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}. \quad (5.2.7)$$

При вычислении получаем $E_0 = -13,53$ эВ, а $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см, что совпадает со значением боровского радиуса a_0 .

Подчеркнем, что предложенное решение этой задачи, не апеллирующее к какой-либо наглядной картине движения электрона внутри атома, позволяет понять, почему атом водорода в основном состоянии может быть сферически симметричным, что установлено на опыте с большой степенью точности: потенциальная энергия электрона зависит только от расстояния до ядра и не зависит от угловых переменных. Этот момент полностью отсутствует в старой квантовой теории Бора.

Задача 5.13. Рассмотрите характеристики атома водорода исходя из соображений размерностей, считая ядро неподвижным.

При неподвижном ядре параметрами, определяющими свойства рассматриваемой системы, будут масса электрона m , квадрат заряда e^2 и постоянная Планка $\hbar$. Удобно брать именно квадрат заряда, потому что именно этой величиной определяется энергия взаимодействия электрона с ядром. Отдельного разговора заслуживает скорость света c : если будем пренебрегать магнитным взаимодействием электрона с ядром, то скорость света не фигурирует в выражениях, описывающих взаимодействие. Скорость света c могла бы фигурировать при условии, что релятивистские эффекты существенны. Это обстоятельство мы оценим после получения ответа, а пока предположим, что релятивистские эффекты несущественны. В этом случае скорость света отсутствует среди параметров, определяющих свойства системы.

Выпишем размерности m , e^2 и $\hbar$:

$$[m] = M, \quad [e^2] = ML^3T^{-2}, \quad [\hbar] = ML^2T^{-1}.$$

Легко видеть, что из них невозможно составить безразмерный параметр, поэтому невозможно одновременно сократить L и T . Но есть параметр с размерностью длины. Сначала сокращаем T , чего можно добиться, составляя отношение $\hbar^2/e^2$. Затем сокращаем M , поделив $\hbar^2/e^2$ на m . Возникающий параметр l с размерностью длины совпадает с боровским радиусом a_0 ,

$$l = \frac{\hbar^2}{m e^2} = a_0. \quad (5.2.8)$$

Таким же образом, устанавливается наличие параметра τ с размерностью времени:

$$\tau = \frac{\hbar^3}{m e^4}. \quad (5.2.9)$$

Сначала подбирается отношение таких степеней e^2 и $\hbar$, чтобы сократилось L и осталась первая степень T . Затем нужной степенью m сокращается M . Теперь очевидно, что существует параметр с размерностью скорости,

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{e^2}{\hbar}, \quad (5.2.10)$$

и можно построить выражение для энергии системы:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} \rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{a_0}.$$

Подставляя сюда выражения для v и a_0 , получаем

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (5.2.11)$$

Итак, получены выражения для энергии и размера атома. Теперь можно оценить законность исключения параметра c (скорость света в вакууме) из числа параметров, определяющих свойства рассматриваемой системы. Домножив и разделив выражение для модуля E на c^2 , получим:

$$|E| = \frac{me^4}{\hbar^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} = mc^2\alpha^2, \quad (5.2.12)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

— постоянная тонкой структуры, характеризующая электромагнитное взаимодействие.

Из выражения (5.2.12) видно, что $|E|$ много меньше энергии покоя электрона mc^2 , и поэтому релятивистские эффекты действительно несущественны.

Выражение для параметра E может быть построено и независимо, непосредственно из исходных параметров. Однако при этом не удастся получить знак минус в (5.2.11). Кроме того, изложенная схема рассуждений позволяет приписать определенный смысл параметру t в (5.2.9). Предположив, что электрон обращается вокруг ядра с угловой скоростью ω . Запишем выражение для второго закона Ньютона

$$m\omega^2 a_0 = \frac{e^2}{a_0^2}.$$

Отсюда, используя выражение (5.2.8) для a_0 , находим, что

$$\omega^2 = \frac{1}{\tau^2},$$

где τ дается выражением (5.2.9).

Таким образом, параметр τ имеет смысл периода обращения электрона вокруг ядра в атоме водорода, если руководствоваться представлениями старой квантовой теории Бора.

С помощью соотношений неопределенностей можно оценить экспериментально наблюдаемое конечное время жизни атома в возбужденном состоянии, т. е. «поймать» явление, которое не описывается уравнением Шредингера для кулоновской системы в одноэлектронном приближении: спектр энергии оказывается дискретным с равной нулю шириной энергетических уровней атома.

Задача 5.14. Исходя из соотношения неопределенностей оцените ширину спектральных линий атома, время жизни которого в возбужденном состоянии составляет $\Delta t = 10^{-8}$ с.

При конечном времени жизни атома в возбужденном состоянии энергия этого состояния может быть определена только с точностью, допускаемой соотношением неопределенностей «энергия–время», поэтому получим

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (5.2.13)$$

В соответствии с соотношениями (5.6) и (5.2.13) не может быть точно определена и частота испускаемого атомом света при переходе из возбужденного состояния в основное. Для ширины $\Delta\nu$ спектральной линии имеем

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{2\pi\Delta t} \approx 10^{-7} \text{ с}^{-1}. \quad (5.2.14)$$

Малая ширина спектральной линии объясняется тем, что длина волны испускаемого света велика по сравнению с размером атома. Действительно, энергия испускаемого фотона по порядку величины равна $me^4/\hbar^2$ — энергии связи электрона в атоме. Вследствие этого имеем

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx \frac{2\pi c \hbar^3}{mc^4} = \frac{2\pi a_0}{\alpha},$$

где α — постоянная тонкой структуры.

Нетрудно заметить, что из решения этой задачи можно получить соотношение между временем жизни атома в возбужденном состоянии Δt и шириной спектральной линии излучения $\Delta\nu$ или $\Delta\omega$ при переходе из этого состояния. Из соотношения (5.2.14) имеем

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx \frac{1}{2\pi},$$

или

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1. \quad (5.2.15)$$

Отметим, что полученное соотношение является иллюстрацией для конкретного случая общего соотношения, связывающего временную и частотную картины описания любого временного процесса.

Задача 5.15. С помощью соотношения неопределенностей «энергия–время» покажите, что степень когерентности лазерного излучения зависит от его мощности.

В отличие от предыдущей задачи будем считать, что излучение лазера происходит на единственной частоте, а неопределенность энергии излучения связана с неопределенностью ΔN числа испускаемых фотонов с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$:

$$\Delta E = \varepsilon \cdot \Delta N = \hbar\omega \cdot \Delta N. \quad (5.2.16)$$

Неопределенность Δt определяет сдвиг фазы $\Delta\varphi$ между испущенными фотонами. Поскольку при гармонических колебаниях

$$x = A \sin \varphi = A \sin (\omega t + \varphi_0),$$

то

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t. \quad (5.2.17)$$

Подставляя ΔE из (5.2.16) в соотношение $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$, получим

$$\Delta N \Delta t \approx 1. \quad (5.2.18)$$

Это соотношение, называемое соотношением неопределенностей между числом фотонов и фазой волны, показывает, что высокая степень когерентности, то есть ничтожно малый сдвиг фазы между различными фотонами, возможен только для мощного лазера, когда ΔN очень велико.

Действительно, при $N \approx 1$ и $\Delta N \approx 1$, а значит, и сдвиг фазы может быть большим. Напротив, при $N \gg 1$ и ΔN может быть очень большим. Тогда из (5.2.18) следует, что сдвиг фазы $\Delta\varphi$ будет незначительным.

Задача 5.16. С помощью соотношений неопределенностей оцените наименьшую возможную энергию квантового осциллятора.

Используя выражение для энергии осциллятора,

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad (5.2.19)$$

и соотношение неопределенностей между p и x ,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

нетрудно убедиться, что существует минимально возможное значение энергии, потому что p и x не могут одновременно обратиться в нуль. Значения p и x в выражении (5.2.19) не могут быть меньше Δp и Δx , поэтому для минимально возможных значений p и x справедливо

$$x \cdot \hbar \approx \hbar. \quad (5.2.20)$$

Выражая p из (5.2.20) и подставляя в (5.2.19), получаем выражение, определяющее по порядку величины минимальное значение энергии квантового осциллятора:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (5.2.21)$$

Чтобы найти минимум этого выражения, дополним его до полного квадрата разности:

$$E = \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mx^2}} - \sqrt{\frac{kx^2}{2}} \right)^2 + \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.2.22)$$

Видно, что минимальное значение энергии по порядку величины равно

$$E_{\min} = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}},$$

причем реализуется оно при значении координаты

$$x_0 = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt[4]{mk}}.$$

Введя частоту

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

получаем

$$E_{\min} \approx \hbar\omega, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Задача 5.17. Рассмотрите квантовый осциллятор и получите приведенные в предыдущей задаче результаты из соображений размерностей.

Параметры, определяющие свойства такой системы — это m , k и $\hbar$. Выписываем их размерности:

$$[m] = M, \quad [k] = MT^{-2}, \quad [\hbar] = ML^2T^{-1}.$$

Сразу видно, что безразмерный параметр отсутствует, потому что невозможно сократить L , входящее в размерность $\hbar$. По этой же причине единственным параметром, имеющим размерность времени будет, как и в случае классического осциллятора, параметр

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Это означает, что частота ω квантового осциллятора, как и классического, определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Но, в отличие от классического осциллятора, теперь имеется параметр, имеющий размерность длины L :

$$l = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt[4]{mk}}. \quad (5.2.23)$$

Вид этого параметра устанавливается следующим образом. Видно, что в него обязательно входит $\sqrt{\hbar}$, обеспечивающий нужную первую степень L . После этого сокращаем T , подбирая для этого нужную степень k , т.е. $\sqrt[4]{k}$ в знаменателе выражения для l , после чего подбором нужной степени m сокращаем M .

Существование параметра, имеющего размерность длины, означает, что энергия осциллятора не может иметь произвольное значение и существует минимальное возможное значение энергии E_0 . В точке остановки вся энергия осциллятора реализуется в виде потенциальной энергии. Поэтому для E_0 можно написать

$$E_0 = \frac{kl^2}{2} = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (5.2.24)$$

Обратим внимание на то, что параметр l имеет тот же смысл, что и x_0 в предыдущей задаче, поскольку выражение (5.2.23) для l можно переписать как

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega^2}}.$$

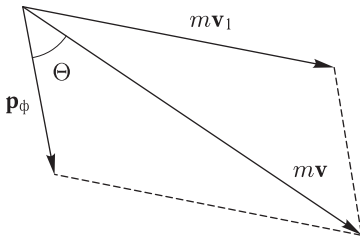


Рис. 5.18.

Задача 5.18. Атом массой m , движущийся с нерелятивистской скоростью v , испускает фотон под углом α к направлению своего движения. Найдите зависимость изменения частоты $\Delta\nu$ фотона от скорости движения атома и угла α .

При испускании фотона свободно движущимся атомом выполняются законы сохранения энергии и импульса системы. Обозначим через $h\nu$ энергию,

которая высвобождается при испускании фотона в результате перехода атома из возбужденного состояния в основное, а через $h\nu_1$ — энергию испущенного фотона. Тогда закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} + h\nu = \frac{mv_1^2}{2} + h\nu_1, \quad (5.2.25)$$

где v_1 — скорость атома после испускания фотона.

Для записи уравнения, соответствующего закону сохранения импульса системы, удобно изобразить векторную диаграмму, изображенную на рис. 5.18.

Для импульса фотона справедливо выражение $h\nu_1/c$. С помощью изображенной диаграммы, используя теорему косинусов, найдем, что

$$(m\nu_1)^2 = (mv)^2 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu_1}{c}mv \cos \Theta. \quad (5.2.26)$$

Система уравнений (5.2.25) и (5.2.26) содержит две неизвестные величины — ν_1 и ν . По условию задачи требуется найти величину $\Delta\nu = \nu_1 - \nu$. Это удобно сделать следующим образом. Прежде всего, пренебрежем квадратом величины $h\nu_1/c$ в правой части уравнения (5.2.26), поскольку импульс фотона пренебрежимо мал по сравнению с импульсом атома при заметной скорости его движения. Тогда уравнение (5.2.26) можно переписать следующим образом:

$$m^2(v^2 - \nu_1^2) = 2\frac{h\nu_1}{c}mv \cos \Theta. \quad (5.2.26a)$$

А уравнение (5.2.25), используя соотношение $\Delta\nu = \nu_1 - \nu$, удобно записать так:

$$m(v^2 - \nu_1^2) = 2h\Delta\nu. \quad (5.2.27)$$

Разделив почленно уравнения (5.2.26a) и (5.2.27), найдем

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{v}{c} \cos \Theta.$$

В этом выражении ν_1 можно заменить на ν , поскольку их значения отличаются очень мало; в результате находим

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \Theta. \quad (5.2.28)$$

Выражение (5.2.28) соответствует явлению Доплера, характерному для волновых процессов. Однако здесь выражение для изменения частоты при движении источника волн получается при рассмотрении корпускулярной картины: излучению волны с частотой ν соответствует поток фотонов с энергией $h\nu$. Постоянная Планка не входит в полученный ответ. Это означает, что рассматриваемое явление можно рассматривать в рамках и волновой, и корпускулярной картины.

Задача 5.19. *Выясните физический смысл фигурирующего в предыдущей задаче параметра ν . В каком случае ν будет соответствовать частоте испускаемого атомом фотона?*

Через $h\nu$ была обозначена энергия, соответствующая переходу атома из возбужденного состояния в основное. Поэтому на первый взгляд может показаться, что ν равна частоте фотона, испускаемого неподвижным атомом. Однако это не так.

Действительно, испускаемый фотон уносит некоторый импульс. По закону сохранения полного импульса системы, равного нулю, атом при испускании фотона приобретает импульс, равный импульсу испущенного фотона, но направленный в противоположную сторону. Поэтому частота ν_1 испущенного неподвижным атомом фотона будет отличаться от ν : высвобождающаяся при переходе атома из возбужденного состояния в основное энергия $h\nu$ поделится на энергию испущенного фотона $h\nu_1$ и кинетическую энергию атома. Законы сохранения энергии и импульса при этом имеют следующий вид:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + h\nu_1, \quad (5.2.29)$$

$$\frac{h\nu_1}{c} - mv = 0. \quad (5.2.30)$$

Выражая скорость атома v после испускания фотона из уравнения (5.2.30) и подставляя в (5.2.29), приходим к равенству

$$2h\nu = \frac{h^2\nu_1^2}{mc^2} + 2h\nu_1, \quad \text{или} \quad \nu = \nu_1 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h\nu_1}{mc^2} \right). \quad (5.2.31)$$

Отсюда видно, что частота ν_1 будет мало отличаться от ν при условии, что энергия испущенного фотона $h\nu_1$ будет мала по сравнению с энергией покоя атома mc^2 . Именно параметр $h\nu_1/mc^2$ определяет степень отличия ν_1 от ν .

Задача 5.20. Атом, летящий со скоростью v , испускает в направлении своего движения фотон с частотой ν . Какой будет частота фотонов, испускаемых в направлении: а) противоположном направлению движения атома; б) перпендикулярном направлению движения атома?

В отличие от двух предыдущих задач под ν здесь понимается именно частота фотона, испускаемого движущимся атомом. Поэтому, обозначив через ΔE изменение внутренней энергии атома при переходе из возбужденного состояния в основное, записываем законы сохранения энергии и импульса в следующем виде.

При испускании фотона вдоль направления движения атома

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{m(v - \Delta v)^2}{2} + h\nu + \Delta E, \\ mv &= m(v - \Delta v) + \frac{h\nu}{c}. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

При испускании фотона в противоположном направлении

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{m(v + \Delta v')^2}{2} + h\nu' + \Delta E, \\ mv &= m(v + \Delta v') + \frac{h\nu'}{c}. \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Изменение скорости атома мало по сравнению с его скоростью, поэтому различием между изменениями скоростей Δv и $\Delta v'$ в рассмотренных случаях можно пренебречь. Тогда, вычитая почленно уравнения закона сохранения энергии, получим, что

$$2mv\Delta v + h(\nu' - \nu) = 0.$$

Аналогично, вычитая уравнения закона сохранения импульса, найдем

$$2mc\Delta v - h(\nu' + \nu) = 0.$$

Разделив почленно два полученных равенства, приходим к выражению

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c}. \quad (5.2.34)$$

В случае, когда фотон испускается перпендикулярно направлению движения атома, удобно изобразить диаграмму, соответствующую закону сохранения импульса.

С помощью диаграммы (рис. 5.20) записываем закон сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v^2 + (\Delta v'')^2)}{2} + h\nu'' + \Delta E, \quad (5.2.35)$$

$$m\Delta v'' - \frac{h\nu''}{c} = 0. \quad (5.2.36)$$

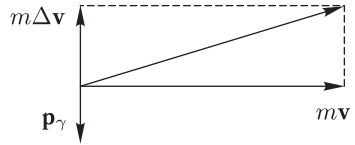


Рис. 5.20.

Как и в первом случае, будем пренебрегать различием между $\Delta v''$ и Δv . Вычитая почленно из первого уравнения (5.2.32) уравнение (5.2.35), получаем

$$\nu - \nu'' = \frac{mv}{h} \Delta v.$$

Подставляя сюда $\Delta v'' = \Delta v$ из уравнения (5.2.36), найдем

$$\nu'' = \nu \frac{1}{1 + v/c}. \quad (5.2.37)$$

Если $v/c \ll 1$, то это равенство можно записать и как

$$\nu'' = \nu(1 - v/c), \quad \text{или} \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\nu'' - \nu}{\nu} = -\frac{v}{c}.$$

Обратим внимание на расхождение этого результата с ответом (5.2.28), полученным ранее. Действительно, полагая в (5.2.28) $\Theta = \pi/2$, получаем $\Delta \nu/\nu = 0$. Дело в том, что при получении выражения (5.2.28) мы пренебрегли в правой части уравнения (5.2.26) вторым слагаемым по сравнению с третьим слагаемым. Но это справедливо только при условии

$$\frac{h\nu_1}{c} \ll 2mv \cos \Theta,$$

которое не выполняется при углах Θ , очень близких к $\pi/2$, несмотря на то, что $\frac{h\nu_1}{c}$ много меньше $m\nu$. Таким образом, выражение (5.2.28) справедливо только при условии

$$\cos \Theta \gg \frac{h\nu_1}{m\nu c}.$$

Задача 5.21. Можно ли рассматривать движение электронов в кинескопе телевизора с помощью законов динамики Ньютона или же необходимо использовать квантовые представления?

В современном телевизоре ускоряющее напряжение в электронно-лучевой трубке около $U \approx 20\,000$ В. Разогнанный такой разностью потенциалов электрон обладает импульсом $p = \sqrt{2meU}$, поскольку при такой разности потенциалов, как легко убедиться, движение электрона будет нерелятивистским. Импульс электрона в пучке направлен вдоль оси трубки. Диаметр пучка, формируемого в электронно-лучевой трубке телевизора, не бывает меньше $d \approx 10^{-3}$ см. При формировании электронного пучка происходит фиксирование координаты электрона в направлении, перпендикулярном оси пучка, то есть с точностью $\Delta x \approx d$. Вследствие соотношения неопределенностей при этом электрону сообщается неконтролируемый импульс Δp_x , перпендикулярный оси пучка,

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} \approx \frac{h}{d}.$$

Связанная с этим импульсом неопределенность в направлении движения электрона $\Delta\Theta$ определяется соотношением

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{d\sqrt{2meU}}.$$

Длина пути электрона в кинескопе на превышает $l \approx 1$ м, поэтому вызванное неопределенностью $\Delta\Theta$ неконтролируемое смещение ΔS электрона на экране кинескопа не превосходит величины

$$\Delta S \approx l \cdot \Delta\Theta = \frac{hl}{d\sqrt{2meU}}.$$

Подставляя сюда значения фигурирующих параметров, получаем $\Delta S \approx 10^4$ см, т.е. неконтролируемое смещение вследствие квантовых эффектов оказывается меньше толщины пучка. Таким образом, рассчитывать движение электронов в электронно-лучевой трубке следует с помощью законов Ньютона.

Задача 5.22. Оцените минимальную ширину пучка электронов в кинескопе телевизора.

Повышение резкости изображения на экране связано с уменьшением диаметра электронного пучка. Однако уменьшение диаметра пучка d имеет смысл только до определенных пределов. При формировании

пучка фиксируется координата электрона в пучке в направлении, перпендикулярном оси пучка, с точностью $\Delta x \approx d$. При этом электрон приобретает в данном направлении неконтролируемый импульс Δp_x ,

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} \approx \frac{h}{d}.$$

В результате возникает угловая неопределенность $\Delta\Theta$ направления движения электрона, равная

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{pd}, \quad (5.2.38)$$

где p — импульс продольного движения электрона в пучке вдоль оси трубки, определяемый ускоряющим напряжением U ,

$$p = \sqrt{2meU}.$$

Итак, благодаря квантовым эффектам при уменьшении диаметра пучка d происходит его уширение. Если длина трубки равна l , то размер пятна на экране D не может быть меньше, чем

$$D = l\Delta\Theta = \frac{lh}{d\sqrt{2meU}}. \quad (5.2.39)$$

В пренебрежении квантовыми эффектами размер пятна на экране трубки равен диаметру пучка d . Очевидно, что уменьшать диаметр d имеет смысл только до тех пор, пока размер D , определяемый квантовыми эффектами, не превосходит d . Отсюда для минимального размера диаметра пучка получаем оценку $d \approx D$, т. е.

$$d = \frac{lh}{d\sqrt{2meU}}.$$

Подставляя в это соотношение численные значения фигурирующих в нем параметров, получаем, что $d \approx 10^{-4}$ см.

Практически размер пучка делается больше этого значения. Обратим внимание на то, что оценку можно выполнить, не используя соотношения неопределенностей, а учитывая возможность проявления электронами волновых свойств. Движению электронов по прямолинейным траекториям соответствует пучок прямых лучей. Уменьшение диаметра пучка может приводить к появлению дифракционных эффектов. Характерный угловой размер дифракционных явлений определяется отношением $\Delta\Theta \approx \lambda/d$. Подставляя значение $\lambda = h/p$, получаем для углового расширения пучка за счет проявления электронами волновых свойств прежнее значение (5.2.39).

5.3. Основы физики атомного ядра

Характерной особенностью данного раздела школьного курса физики является отсутствие знаний о законах внутриядерных взаимодействий. Поэтому задачи этого раздела, в которых рассматриваются процессы распада и синтеза атомных ядер, решаются исключительно на втором уровне методологии, т.е. на основе использования фундаментальных законов сохранения.

Рассмотрим задачу.

Задача 5.23. *Покоящееся ядро массой m распадается на два осколка с массами покоя m_1 и m_2 . Найти, как распределится между ними энергия, освобождаемая при распаде ядра. Чему равна эта энергия распада?*

Энергия распада реализуется в виде кинетических энергий E_{k1} и E_{k2} разлетающихся осколков. Поэтому общее соотношение $E = mc^2$ позволяет сразу сделать вывод о том, что

$$m_1 + m_2 \leq m,$$

причем знак равенства возможен только при неподвижных осколках.

Таким образом, на основании закона сохранения энергии можно предположить, что энергия E_p равна

$$E_p = mc^2 - (m_1 + m_2)c^2 = E_{k1} + E_{k2}. \quad (5.3.1)$$

Подчеркнем, что приведенная выше формулировка этой задачи оказывается предпочтительней формулировок, приведенных в книгах [4] и [5], поскольку позволяет на основании общих соображений выдвинуть гипотезу о справедливости соотношения (5.3.1), а не просто проверять ее в конце решения на основе полученного ответа на первый вопрос условия задачи.

Компактность математических преобразований при решении этой задачи зависит от удачного выбора выражений для релятивистских значений энергии и импульса. Таковыми в данном случае будут выражения, не содержащие скоростей осколков, поскольку вследствие закона сохранения импульса системы импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ разлетающихся осколков одинаковы по модулю. Это сразу позволяет записать выражения для энергий E_1 и E_2 осколков:

$$E_1^2 = p^2 c^2 + m_1^2 c^4, \quad E_2^2 = p^2 c^2 + m_2^2 c^4. \quad (5.3.2)$$

Из соотношений (5.3.2) следует равенство

$$E_1^2 - m_1^2 c^4 = E_2^2 - m_2^2 c^4. \quad (5.3.3)$$

Учитывая, что вследствие закона сохранения энергии,

$$E_2 = mc^2 - E_1,$$

равенство (5.3.3) будет иметь вид

$$E_1^2 - m_1^2 c^4 = (mc^2 - E_1)^2 - m_2^2 c^4.$$

Раскрывая квадрат разности в правой части этого равенства, приходим к выражению для E_1 :

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2. \quad (5.3.4)$$

Кинетическая энергия первого осколка находится с помощью соотношения

$$E_{k1} = E_1 - m_1 c^2 = \frac{(m - m_1)^2 - m_2^2}{2m} c^2. \quad (5.3.5)$$

Кинетическая энергия второго осколка из соображений симметрии системы относительно номеров, приписываемых осколкам, получается из (5.3.5) путем замены $1 \leftrightarrow 2$:

$$E_{k2} = E_2 - m_2 c^2 = \frac{(m - m_2)^2 - m_1^2}{2m} c^2. \quad (5.3.6)$$

Теперь с помощью соотношений (5.3.5) и (5.3.6) убеждаемся в справедливости сделанного предположения об энергии распада ядра. Складывая (5.3.6) и (5.3.5), получаем

$$E_{k1} + E_{k2} = mc^2 - (m_1 + m_2) c^2. \quad (5.3.7)$$

Нетрудно убедиться, что использование формул для энергии и импульса, содержащих скорости осколков, приведет к более громоздким преобразованиям, поскольку скорости v_1 и v_2 входят как в общий релятивистский корень, так и в числитель выражения для импульса. В результате выражения, аналогичные (5.3.2), будут иметь вид

$$mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Теперь для ответа на первый вопрос условия задачи придется сначала решать эту систему уравнений относительно v_1 и v_2 , а затем находить выражение для кинетической энергии осколков, например:

$$E_{k1} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - m_1 c^2.$$

Выдвижение предположения о справедливости соотношения (5.3.1) фактически позволяет проверить правильность полученного решения, его внутреннюю непротиворечивость и взаимную согласованность всех положений использованной физической модели явления.

Использование соотношений вида (5.3.2), удобное в случаях, когда происходит распад неподвижной системы на две части, модули импульсов которых одинаковы, возможно не всегда. Так происходит, когда для одной из образовавшихся частей не применимо понятие массы покоя. Для примера рассмотрим задачу [5]:

Задача 5.24. *Возбужденное ядро переходит в основное состояние путем испускания γ -кванта. Масса покоя ядра в основном состоянии равна m . Энергия возбуждения ядра равна ΔE . Определить частоту испускаемого γ -кванта.*

На первый взгляд может показаться, что в рассматриваемом случае можно использовать соотношение $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. Действительно, в отсутствие взаимодействия с другими объектами атомное ядро в системе отсчета, связанной с Землей (которая считается инерциальной), покоится или движется равномерно. Поэтому существует инерциальная система отсчета, в которой рассматриваемое возбужденное ядро покоится. Импульс испускаемого ядром γ -кванта равен по модулю и противоположен по направлению импульсу, приобретаемому ядром вследствие отдачи. Поэтому полный импульс системы остается равным нулю, и квадрат энергии системы, равный $mc^2 + \Delta E$, можно приравнять произведению квадрата массы покоя получившейся системы «ядро– γ -квант» на четвертую степень скорости света. Однако γ -квант не существует в состоянии покоя (ему соответствует масса m_γ , $h\nu = m_\gamma c^2$, но m_γ не является массой покоя), и обсуждаемое равенство оказывается невозможным.

В результате приходится использовать законы сохранения энергии и импульса в следующем виде:

$$mc^2 + \Delta E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + h\nu, \quad \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{h\nu}{c} = 0, \quad (5.3.8)$$

где v — скорость ядра после испускания γ -кванта.

Решая систему уравнений (5.3.8), после довольно громоздких преобразований получаем выражение для частоты ν :

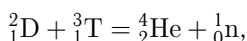
$$\nu = \frac{\Delta E}{2h} \cdot \frac{2mc^2 + \Delta E}{mc^2 + \Delta E}.$$

Компактный способ решения систем уравнений вида (5.3.8) изложен в п. 4. Поскольку уравнения (5.3.8) записаны для системы отсчета, где возбужденное ядро неподвижно, то приведенное значение частоты

будет наблюдаться в этой системе отсчета. В исходной системе отсчета, связанной с Землей, будет наблюдаться сдвиг частоты, определяемый эффектом Доплера, поскольку в этой системе отсчета возбужденное ядро движется со скоростью v , и мы имеем дело с испусканием γ -кванта движущимся источником.

Не всегда при решении задач о свойствах атомных ядер необходимо использовать релятивистские соотношения. В ряде случаев, проведя соответствующие оценки для характерных значений энергий происходящих превращений, можно использовать и нерелятивистские формулы для энергии и импульса. Особенно просто это сделать, когда в условии задачи приводятся значения фигурирующих энергий. Рассмотрим задачу, приведенную в [5], дополнив ее условие еще одним вопросом.

Задача 5.25. Реакцию синтеза тяжелых изотопов водорода дейтерия ${}^2_1\text{D}$ и трития ${}^3_1\text{T}$,



изучают, направляя ускоренные до значения кинетической энергии $E = 2 \text{ МэВ}$ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтонов. Какова кинетическая энергия E_n регистрируемых нейтронов, если в реакции синтеза выделяется энергия $E_1 = 17 \text{ МэВ}$? Под каким углом к пучку дейтонов вылетают α -частицы?

С помощью приведенных значений энергии легко убедиться, что энергия покоя даже самой легкой из фигурирующих частиц (нейтрона) много больше кинетической энергии ионов дейтерия и энергии, выделяющейся в результате реакции. Поэтому нет никакой необходимости в учете релятивистских эффектов, и законы сохранения энергии и импульса могут быть записаны с помощью обычных, нерелятивистских, формул. Обозначим через φ угол между направлениями скоростей дейтона и образующейся α -частицы (рис. 5.25) и запишем закон сохранения импульса в виде

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\alpha.$$

Поскольку геометрически в силу условия задачи этому закону соответствует диаграмма, показанная на рис. 5.25, получаем равенства

$$\begin{aligned} p_D &= p_\alpha \cos \varphi, \\ p_n &= p_\alpha \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Закон сохранения энергии для обсуждаемого процесса записываем в виде

$$\frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = E + E_1. \quad (5.3.10)$$

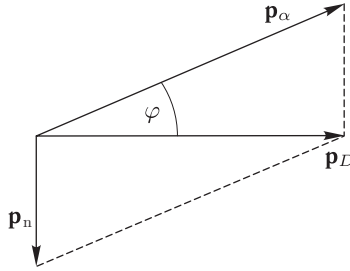


Рис. 5.25.

Равенство (5.3.9) означает, что кинетическая энергия налетающего дейтона и освобождающаяся в результате реакции энергия E_1 реализуется в виде кинетических энергий образующихся частиц — нейтрона и α -частицы. Теперь очевидно, что закон сохранения импульса с помощью представленной диаграммы будет удобнее записать в виде

$$p_\alpha^2 = p_D^2 + p_n^2. \quad (5.3.11)$$

Учитывая, что кинетическая энергия налетающего дейтона есть

$$E = \frac{p_D^2}{2m_D},$$

легко видеть, что система уравнений (5.3.9) и (5.3.10) достаточна для определения кинетической энергии нейтрона,

$$E = \frac{p_n^2}{2m_n},$$

причем эти энергии, на первый взгляд, не зависят от угла φ между направлением движения дейтона и α -частицы. Переписывая равенство (5.3.9) в виде

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p_D^2}{2m_D} \cdot \frac{m_D}{m_\alpha} + \frac{p_n^2}{2m_n} \cdot \frac{m_n}{m_\alpha},$$

с помощью (5.3.10) немедленно получаем

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_n} \left(E_1 + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} E \right). \quad (5.3.12)$$

Учитывая соотношение между массами частиц, участвующих в реакции

$$\frac{m_\alpha}{m_n} = 4, \quad \frac{m_\alpha}{m_D} = 2,$$

получаем $E_n = 14,4$ МэВ.

Кажущаяся независимость энергии нейтронов E_n от угла φ возникает благодаря тому, что в условии задачи заданы выделяющаяся при реакции синтеза энергия E_1 , которая фиксирована и определяется видом ядерной реакции, и энергия налетающих дейтонов E .

В зависимости от значения E будет изменяться и угол φ . С помощью соотношений (5.3.9) или из прямоугольного треугольника на диаграмме находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_n}{p_D} = \sqrt{\frac{2m_n E_n}{2m_D E_D}}.$$

Подставляя в это выражение значение E_n из (5.3.12), получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{m_n m_\alpha}{(m_n + m_\alpha) m_D} \left(\frac{E_1}{E} + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} \right)} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Таким образом, запись закона сохранения импульса в виде (5.3.11) позволяет сделать немного более компактными алгебраические преобразования при нахождении энергии нейтрона, но для определения угла разлета нейтронов и α -частиц все равно приходится использовать тригонометрические соотношения.

Состав и структуру атомных ядер, в отсутствие знаний о законах взаимодействия нуклонов внутри ядра, можно изучать только с помощью качественных оценок, производимых с помощью соотношений неопределенностей (5.7). Однако такой подход позволяет достаточно надежно описать некоторые характеристики атомных ядер.

Задача 5.26. *Используя соотношения неопределенностей, покажите, что в состав атомных ядер не могут входить электроны.*

Атомное ядро имеет диаметр порядка 10^{-12} – 10^{-13} см. Если электрон находится внутри ядра, то соотношение неопределенностей приводит к следующей оценке для его импульса:

$$p \approx \frac{\hbar}{r_0},$$

где r_0 — радиус ядра.

Используя соотношение (5.2), получаем, что энергия E электрона составляет порядка 0,2 ГэВ, что в 400 раз больше, чем его энергия покоя $m_0 c^2$, составляющая всего 0,5 МэВ. Такое большое значение энергии электрона абсолютно несовместимо со значением удельной энергии связи в ядре, равным 8 МэВ. Это не позволяет считать, что электрон может находиться внутри ядра.

Задача 5.27. *Считая, что атомное ядро состоит из нейтронов и протонов, оцените энергию связи нуклона в ядре. Можно ли считать, что внутри ядра нуклоны сохраняют свою индивидуальность?*

Используя оценку для импульса p протона или нейтрона ядра $p \approx \hbar/r_0$, получаем для нуклона массой $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$ г при радиусе ядра $r_0 \approx 10^{-13}$ см значение скорости, составляющее несколько десятых скорости света. Поэтому при оценках нуклон в ядре можно считать

нерелятивистским, и его кинетическая энергия должна быть величиной порядка

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar}{2mr_0} \approx 10 \text{ МэВ}.$$

Нуклон в ядре находится в связанном состоянии, поэтому в соответствии с полученной оценкой для кинетической энергии модуль (отрицательной) потенциальной энергии должен быть не меньше 10 МэВ. Поэтому глубина потенциальной ямы, в которой находится нуклон внутри ядра, и которая и определяет энергию связи, приходящуюся на один нуклон, составляет примерно 10 МэВ. Такая грубая оценка неплохо согласуется с полученным из масс-спектрометрических измерений значением в 8 МэВ/нуклон.

Энергия связи в 10 МэВ составляет всего один процент от энергии покоя нуклона, равной примерно 1 ГэВ. Поэтому можно считать, что ядро состоит из отдельных нуклонов, сохраняющих свою индивидуальность внутри ядра.

Задача 5.28. *Используя соотношения неопределенностей, получите оценку для массы мезона — частицы, путем обмена которой происходит сильное взаимодействие между нуклонами в ядре.*

Неопределенность ΔE значения энергии атомного ядра при испускании одним из нуклонов мезона массой m определяется энергией мезона, поэтому

$$\Delta E = mc^2.$$

Эта неопределенность существует в течение времени Δt пролета мезона внутри ядра, пока он не будет поглощен другим нуклоном в ядре. Скорость мезона не может превышать скорости света, поэтому для Δt можно принять оценку

$$\Delta t \approx \frac{r_0}{c},$$

где r_0 — характерный размер ядра.

Согласно соотношению неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ для массы мезона получаем

$$m \approx \frac{\hbar}{r_0 c} \approx 3 \cdot 10^{-25} \text{ г},$$

что составляет примерно 300 электронных масс. Величина $\hbar/mc$ называется комптоновской длиной частицы массой m . Комптоновской длиной характеризуется пространственный масштаб взаимодействия, осуществляемого обменом такими частицами.

Может возникнуть сомнение в разумности оценки, приводимой для промежутка времени Δt , поскольку частица конечной массы покоя не может двигаться со скоростью света. Поэтому можно видоизменить

рассуждения, но при этом придется воспользоваться еще и соотношением неопределенностей «импульс–координата».

Считаем, что мезон все время локализован внутри ядра. Тогда для его импульса получаем оценку

$$p \approx \frac{\hbar}{r_0}.$$

Теперь для Δt можно записать

$$\Delta t \approx \frac{r_0 m}{p} \approx \frac{m r_0^2}{\hbar}.$$

Подставляя это выражение в соотношение неопределенностей «энергия–время», приходим к той же оценке для массы,

$$m \approx \frac{\hbar}{r_0 c} \approx 3 \cdot 10^{-25} \text{ г.}$$

Причина, по которой при таких рассуждениях получается тот же результат, заключается в том, что мезон внутри ядра фактически является релятивистским. Действительно, легко видеть, что при использовании полученных оценок справедливо равенство

$$pc = mc^2.$$

Это обстоятельство не лишает смысла приведенные рассуждения, поскольку мезон существует внутри ядра только виртуально, в течение промежутка времени Δt , когда неопределенной является энергия системы.

5.4. Элементарные частицы

На школьном уровне характерные задачи данного раздела физики решаются с помощью фундаментальных законов сохранения для релятивистского движения частиц. Существенное значение при этом имеет удачный выбор системы отсчета, позволяющей значительно упростить или даже свести на нет алгебраические преобразования. Обратим внимание на то, что законы сохранения энергии и импульса не запрещают распад свободных частиц с испусканием новых частиц, если только среди образовавшихся частиц нет тождественных с исходной частицей. В таком случае, как было показано в первой главе, распад невозможен.

Рассмотрим задачу [5].

Задача 5.29. При распаде нейтрального π -мезона образуются два фотона с энергиями E_1 и E_2 , которые летят в противоположных направлениях. Определите скорость v , с которой двигался распавшийся π -мезон.

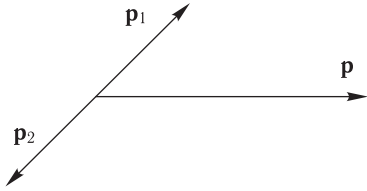


Рис. 5.29.

Легко убедиться, что при заданном условии задачи фотоны могут двигаться только вдоль прямой, по которой двигался распавшийся мезон. Изобразим графически импульс мезона $\mathbf{p}$ и попытаемся изобразить импульсы фотонов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, предположив, что они движутся вдоль другого направления.

Из диаграммы на рис. 5.29 видно, что ни при каких значениях $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ их векторная сумма не может равняться $\mathbf{p}$, как того требует закон сохранения импульса. Итак, направление движения одного из фотонов обязательно совпадает с направлением движения мезона. Теперь уже просто записать законы сохранения импульса и энергии:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}, \quad \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_1 + E_2. \quad (5.4.1)$$

Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$v = c \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}. \quad (5.4.2)$$

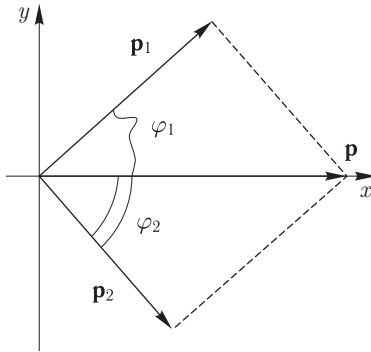


Рис. 5.30.

Отсюда следует, что неподвижный мезон, распадаясь, порождает фотоны одинаковых энергий. При этом распад возможен, если частота фотонов ν удовлетворяет условию $\nu = mc^2/2h$. В этой задаче не приходится задумываться о выборе системы отсчета, поскольку сам вопрос, поставленный в условии, подразумевает использование лабораторной системы.

Обратим внимание на то, что необходимые выкладки будут еще проще, если использовать для импульса мезона соотношение $p = Ev/c^2$ и учесть, что в силу закона сохранения энергия мезона E равна сумме энергий E_1 и E_2 образовавшихся фотонов. Теперь закон сохранения импульса запишем в виде

$$\frac{(E_1 + E_2)v}{c^2} = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c},$$

откуда немедленно следует равенство (5.4.2).

Наиболее компактные выкладки будут несколько другими, когда при распаде мезона образовавшиеся фотоны летят под разными углами по отношению к направлению движения мезона. Рассмотрим эту задачу.

Задача 5.30. При распаде нейтрального π -мезона образуются два фотона, летящие под углами φ_1 и φ_2 к направлению движения мезона до распада. Найдите модуль скорости, с которой двигался мезон, считая, что все три направления движения (мезона и образовавшихся фотонов) лежат в одной плоскости.

Для записи закона сохранения импульса удобно изобразить векторную диаграмму (рис. 5.30), обозначив импульсы мезона и фотонов через $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$.

Проектируя векторное равенство $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, соответствующее закону сохранения импульса, на параллельное x и перпендикулярное y вектору $\mathbf{p}$ направления, получаем

$$\begin{aligned} p &= p_1 \cos \varphi_1 + p_2 \cos \varphi_2 = \frac{Ev}{c^2}, \\ p_1 \sin \varphi_1 - p_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Закон сохранения энергии E системы удобно записать в виде

$$E = p_1 c + p_2 c. \quad (5.4.4)$$

Разделив почленно первое из равенств (5.4.3) на E и учтя соотношение (5.4.4), найдем, что

$$\frac{v}{c} = \frac{p_1 \cos \varphi_1 + p_2 \cos \varphi_2}{p_1 + p_2}. \quad (5.4.5)$$

Выражая p_2 через p_1 с помощью второго равенства (5.4.3), подставляя в соотношение (5.4.5) и используя формулу для синуса суммы двух углов, получим

$$v = c \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}.$$

Подчеркнем, что полученный ответ справедлив только при выполнении последнего условия в формулировке задачи.

Задача 5.31. Неподвижный отрицательный π -мезон распадается на мюон и нейтрино, масса покоя которого равна нулю. Считая известными массы покоя обеих частиц, найдите кинетическую энергию образовавшегося мюона и скорость, с которой он движется.

Полный импульс системы равен нулю вследствие неподвижности распадающегося мезона. Поэтому закон сохранения импульса имеет следующий вид:

$$\frac{m_\mu v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{E_\nu}{c} = 0, \quad (5.4.6)$$

где E_ν — энергия образовавшегося нейтрино с массой покоя, равной нулю.

Закон сохранения энергии удобно записать в виде

$$m_\pi c^2 = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + E_\nu. \quad (5.4.7)$$

Подчеркнем, что именно такая запись законов сохранения позволяет выполнить наиболее компактные алгебраические преобразования для нахождения искомых величин. Домножаем обе части равенства (5.4.6) на скорость света c и складываем почленно с (5.4.7). Возведя получившееся равенство в квадрат, получаем простое уравнение для скорости v , решая которое, находим

$$v = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c. \quad (5.4.8)$$

Для определения кинетической энергии E_k π -мезона воспользуемся релятивистской формулой

$$E_k = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_\mu c^2.$$

Подставляя сюда выражение (5.4.8) для скорости v , находим, что

$$E_k = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi} c^2. \quad (5.4.9)$$

Интересно сравнить это выражение с нерелятивистской формулой для кинетической энергии:

$$E_{k1} = \frac{m_\mu v^2}{2} = \frac{m_\mu}{2} \cdot \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \right) c^2.$$

Составим отношение

$$\frac{E_{k1}}{E_k} = m_\pi m_\mu \frac{(m_\pi + m_\mu)^2}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)^2}.$$

Подставляя сюда значения масс частиц в энергетических единицах (МэВ/ c^2): $m_\pi = 139,6$, $m_\mu = 106$, получаем, что $E_{k1}/E_k = 0,94$.

Видно, что нерелятивистская формула для кинетической энергии образовавшегося мюона дает значение, отличающееся от точного на 4 %. Возможность использования нерелятивистского выражения становится очевидной еще из выражения (5.4.8) для скорости мюона, так как подставив в него значения масс частиц, получим $v = 0,24c$.

Задача 5.32. Фотон с частотой ν рассеивается назад неподвижным электроном. Какова частота ν_1 рассеянного фотона? Как эта частота зависит от энергии налетающего фотона?

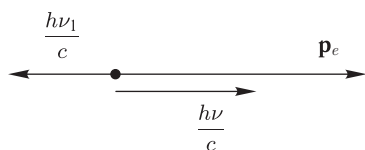


Рис. 5.31.

Вкладки можно сделать очень простыми, если, построив диаграмму, соответствующую закону сохранения импульса, записать для импульса электрона после рассеяния фотона выражение

$$p_e = \frac{h\nu}{v} + \frac{h\nu_1}{c}$$

и подставить его в закон сохранения энергии:

$$h\nu + mc^2 = h\nu_1 + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Переносим первое слагаемое в правой части получившегося равенства налево и возводя в квадрат новое получающееся уравнение, после приведения подобных членов получаем

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 + \frac{2h\nu}{mc^2}}. \quad (5.4.10)$$

Интересно исследовать предельные случаи. Если энергия налетающего фотона много меньше энергии покоя электрона ($h\nu/(mc^2) \ll 1$), то частота рассеянного фотона очень мало отличается от частоты налетающего, а именно:

$$\nu_1 \approx \nu \left(1 - \frac{2h\nu}{mc^2} \right).$$

В противном случае, когда энергия фотона много больше энергии покоя электрона ($h\nu/(mc^2) \gg 1$), частота рассеянного фотона не зависит от частоты падающего и определяется половиной энергии покоя электрона. Пренебрегая единицей в знаменателе выражения (5.4.10), найдем, что

$$\nu_1 \approx \frac{mc^2}{2h}. \quad (5.4.11)$$

Легко видеть, что в такой ситуации длина волны рассеянного фотона λ_1 имеет порядок комптоновской длины электрона. Используя выражение (5.4.11), получаем

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{2h}{mc}.$$

Использование квантовых представлений в ряде случаев позволяет просто решать задачи об особенностях распространения электромагнитного излучения. Приведем соответствующий пример.

Задача 5.33. *Монохроматический свет частотой ω_0 падает нормально к поверхности плоского зеркала, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v в направлении распространения падающего света. Найдите частоту ω отраженного света.*

Учитывая, что электромагнитную волну можно рассматривать как поток фотонов, рассмотрим упругое отражение фотона с частотой ω_0 от зеркала, массу покоя которого обозначим через m . Тогда законы сохранения энергии и импульса для такого процесса в лабораторной системе отсчета записывается в виде

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \hbar\omega_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \hbar\omega, \quad (5.4.12)$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\hbar\omega_0}{c} = \frac{mv_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \frac{\hbar\omega}{c}, \quad (5.4.13)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$, v_1 — скорость зеркала после отражения фотона.

Соотношение (5.4.13) удобно переписать в виде

$$\frac{mc^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \hbar\omega_0 = \frac{mc^2\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \hbar\omega. \quad (5.4.14)$$

Система уравнений (5.4.12) и (5.4.14) позволяет определить частоту ω отраженного фотона и скорость зеркала v_1 после отражения фотона. Рациональное компактное решение этой системы, которое может использоваться при решении аналогичных систем уравнений, возникающих в других задачах, можно провести следующим образом.

Сложим почленно уравнения (5.4.12) и (5.4.14). Легко видеть, что результат может быть записан в виде

$$mc^2\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + 2\hbar\omega_0 = mc^2\sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}}. \quad (5.4.15)$$

Вычитая почленно уравнения (5.4.12) и (5.4.14), аналогично получим соотношение

$$mc^2\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 2\hbar\omega = mc^2\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}}. \quad (5.4.16)$$

Теперь, перемножая почленно уравнения (5.4.15) и (5.4.16), исключаем β_1 и приходим к уравнению

$$m^2 c^4 + 2\hbar\omega_0 m c^2 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 2\hbar\omega m c^2 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 4\hbar^2 \omega_0 \omega = m^2 c^4,$$

откуда получаем выражение для ω :

$$\omega = \frac{m c^2 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}{m c^2 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + 2\hbar\omega_0} \cdot \omega_0.$$

Энергия покоя макроскопического зеркала на много порядков превосходит энергию фотона. Поэтому в знаменателе получившегося выражения можно пренебречь вторым слагаемым. В результате выражение для частоты ω принимает вид

$$\omega = \frac{1-\beta}{1+\beta} \omega_0 = \frac{c-v}{c+v} \omega_0.$$

Таким образом, кажущееся вносимое усложнение в исходную задачу в действительности может описать более сложный процесс, когда учитывается влияние падающего света на движение зеркала. При другом решении задачи следует использовать двукратное преобразование Лоренца: сначала перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью v , где зеркало покоится, и найти значение частоты ω в этой системе, которая не изменяется при отражении от покоящегося зеркала. Затем перейти в исходную лабораторную систему отсчета, которая движется со скоростью v относительно промежуточной системы в противоположную сторону.

Использование законов сохранения энергии и импульса позволяет на школьном уровне, применяя не до конца корректные рассуждения, рассматривать явление изменения частоты фотонов при распространении в гравитационном поле. Возможны различные формулировки задач при изучении этого явления [3, 10]. При рассмотрении однородного гравитационного поля задача может быть сформулирована следующим образом:

Задача 5.34. *Источник монохроматического γ -излучения располагается у поверхности Земли, а приемник — на высоте $h = 22$ м над источником. Определите сдвиг частоты излучения, регистрируемого приемником, относительно частоты источника.*

Каким бы ни был характер взаимодействия γ -квантов с гравитационным полем Земли, полная энергия системы остается неизменной вследствие потенциальности поля тяготения. Влияние γ -квантов

на Землю пренебрежимо мало, и изменением ее энергии в результате этого взаимодействия можно пренебречь. Поэтому остается неизменной и полная энергия γ -кванта. Пусть испущенный у поверхности Земли γ -квант имеет частоту ω_0 , так что его энергия равна $E = \hbar\omega$. Зарегистрированный на высоте h γ -квант будет иметь другую частоту, $\omega \neq \omega_0$, так как при подъеме в поле тяготения потенциальная энергия этого кванта увеличивается на величину mgh . Масса γ -кванта может быть определена с помощью универсального релятивистского соотношения между массой и энергией,

$$mc^2 = \hbar\omega_0. \quad (5.4.17)$$

На основании закона сохранения энергии имеем

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega + mgh.$$

Подставляя в это равенство массу из (5.4.17), переписываем его в виде

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega_0}{c^2}gh,$$

откуда для относительного сдвига частоты $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{gh}{c^2}. \quad (5.4.18)$$

Используя числовые значения параметров, получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -2,4 \cdot 10^{-15}.$$

Знак минус означает, что частота γ -излучения уменьшается. Таким образом, в условиях, когда приемник находится выше источника, наблюдается «красное» смещение. Если поменять местами источник и приемник, то частота увеличивается.

Такой же результат можно получить и с помощью закона сохранения импульса системы. Импульс γ -кванта в результате действия силы тяжести $mg = \frac{\hbar\omega_0}{c^2}g$ изменяется от значения $\frac{\hbar\omega_0}{c}$ до $\frac{\hbar\omega}{c}$. Закон изменения импульса γ -кванта имеет вид

$$\frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar\omega_0}{c} = -\frac{\hbar\omega_0}{c^2}gt, \quad (5.4.19)$$

где t — время подъема кванта на высоту h , равное h/c , поскольку квант движется со скоростью света. Из соотношения (5.4.19) следует прежний результат (5.4.18). Отметим, что такое же по модулю, но противоположное по направлению будет и изменение импульса Земли. Поэтому при решении этой задачи необходимым и полезным для развития мышления будет обсуждение вопроса, почему изменением энергии

Земли при рассматриваемом процессе можно пренебречь, а изменением импульса — нельзя.

При рассмотрении неоднородного гравитационного поля возможна такая формулировка задачи.

Задача 5.35. *Одной из причин красного смещения спектральных линий для излучения, приходящего от далеких звезд и галактик, является наличие массы у фотонов. Определите величину красного смещения, происходящего по этой причине.*

Рассматривая для определенности свет, приходящий от звезды массой M , на основании закона сохранения энергии для фотона массой m имеем равенство

$$h\nu_0 = G\frac{Mm}{R} + h\nu, \quad (5.4.20)$$

где ν_0 — частота света, излучаемого звездой, ν — частота света, приходящего к Земле, R — радиус звезды.

При написании уравнения (5.4.20) учтено, что, удалившись от звезды на очень большое расстояние, фотон имеет потенциальную энергию, связанную с полем тяготения этой звезды, равную нулю. Тогда у края звезды его потенциальная энергия в условиях применимости ньютоновой теории тяготения равна $-G\frac{Mm}{R}$, так что увеличение потенциальной энергии фотона при удалении от звезды равно

$$0 - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = G\frac{Mm}{R}.$$

Подставляя в (5.4.20) массу фотона $m = \frac{h\nu_0}{c^2}$, получаем,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -G\frac{M}{Rc^2}.$$

При решении задач данного раздела могут эффективно использоваться соотношения неопределенностей, когда речь идет о качественных оценках квантовых явлений. Рассмотрим задачу из книги [5].

Задача 5.36. *В еще не созданной квантовой теории гравитации предполагается существование гравитона — кванта гравитационного поля и гравитационных волн. Оцените энергию гравитона по порядку величины.*

Если предположить, что гравитоны рождаются в результате квантовых осцилляций вакуума, то в силу закона сохранения импульса пара образовавшихся гравитонов должна разлетаться в противоположные стороны с одинаковыми импульсами. На расстоянии r друг от друга они окажутся спустя время $\Delta t = r/c$. Оказавшись на таком расстоянии, гравитоны массой M будут обладать потенциальной энергией

тяготения, равной $-GM^2/r$. Поэтому неопределенность значения энергии будет по порядку величины равна $\Delta E \approx GM^2/r$.

В силу общего релятивистского соотношения $E = mc^2$ справедлива оценка

$$\Delta E = Mc^2.$$

Собирая вместе записанные соотношения и учитывая соотношение неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$, приходим к равенству

$$G(\Delta E)^2 \approx hc^5, \quad (5.4.21)$$

откуда находим $\Delta E \approx 5 \cdot 10^9$ Дж.

Отметим внутреннюю согласованность всех проведенных оценок: Δt — это время, требуемое для удаления гравитонов друг от друга на расстояние r , фигурирующее в выражении для потенциальной энергии. Модуль этой энергии характеризует неопределенность ΔE значения энергии системы, для которой можно воспользоваться также общей релятивистской связью между массой и энергией. Величины ΔE и Δt , фигурирующие в этих рассуждениях, точно соответствуют по смыслу величинам ΔE и Δt , входящим в соотношение неопределенностей: неопределенность значения энергии и промежуток времени, в течение которого существует эта неопределенность.

Полученный результат (5.4.21) можно найти и из соображений размерности. Составим размерность величин h , c и G , которые могут входить в выражение для энергии гравитона:

$$[h] = ML^2T^{-1}, \quad [c] = LT^{-1}, \quad [G] = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

Теперь будем собирать из них размерность энергии $[E] = ML^2T^{-2}$. Составляя соотношение

$$E \approx h^x c^y G^z,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= x - z, \\ 2 &= 2x + y + 3z, \\ -2 &= -x - y - 2z. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$, т.е. выражение для энергии, соответствующее выражению (5.4.21).

Задача 5.37. На неподвижную элементарную частицу с массой покоя M_0 налетает другая элементарная частица с массой покоя m_0 , полная энергия которой равна E . Определите энергию E_1 этой частицы после столкновения как функцию угла рассеяния Θ_1 . Столкновения частиц считать упругими.

Упругий характер столкновения означает, что после столкновения это будут те же самые частицы с теми же массами m_0 и M_0 . Запишем законы сохранения энергии и импульса для рассматриваемого процесса:

$$E + M_0 c^2 = E_1 + E_2, \quad (5.4.22)$$

$$p = p_1 \cos \Theta_1 + p_2 \cos \Theta_2, \quad (5.4.23)$$

$$p_1 \sin \Theta_1 - p_2 \sin \Theta_2. \quad (5.4.24)$$

Здесь E_2 — энергия неподвижной до столкновения частицы после столкновения, p_1 и p_2 — импульсы частиц после столкновения, p — импульс налетающей частицы, Θ_1 и Θ_2 , которые составляют векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ с направлением вектора $\mathbf{p}$.

Выразим входящие в уравнения (5.4.23) и (5.4.24) импульсы через соответствующие значения энергий с помощью фундаментального соотношения (5.2). Имеем

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2},$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - M_0^2 c^2},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{E_2^2}{c^2} - M_0^2 c^2}.$$

Подставляем эти выражения в уравнения (5.4.23) и (5.4.24), после чего с помощью равенства (5.4.22) исключаем величины E_2 и Θ_2 . В результате приходим к соотношению

$$(E - E_1) M_0 c^2 - E E_1 + \sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4)(E_1^2 - m_0^2 c^4)} \cos \Theta_1 + m_0^2 c^4 = 0. \quad (5.4.25)$$

Соотношение (5.4.25) определяет энергию E_1 как главную функцию угла рассеяния Θ_1 .

Интересно отметить, что это выражение содержит в качестве частного случая формулу Комптона для рассеяния фотона на неподвижном свободном электроне. В этом случае $m_0 = 0$, $E = h\nu$, $E_1 = h\nu_1$, где ν и ν_1 — частоты фотона до и после рассеяния, соответственно. Подставляя эти значения в (5.4.25), приходим к формуле Комптона:

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{M_0 c^2} (1 - \cos \Theta_1). \quad (5.4.26)$$

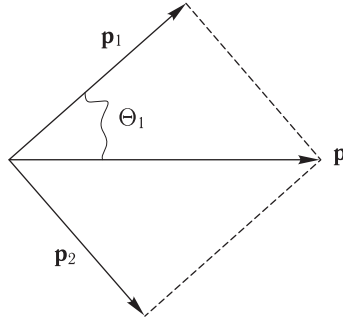


Рис. 5.37.

Для проверки результата можно вывести эту формулу проще, поскольку для неподвижного до рассеяния электрона можно использовать нерелятивистское приближение, если $h\nu \ll M_0 c^2$. В этом случае законы сохранения энергии и импульса записываются в виде

$$h\nu = h\nu_1 + \frac{p_2^2}{2M_0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (5.4.27)$$

где $p = \frac{h\nu}{c}$, $p_1 = \frac{h\nu_1}{c}$, а соответствующая закону сохранения импульса диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 5.37.

Используя теорему косинусов, получим

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos \Theta_1.$$

Подставляя p_2^2 в уравнение закона сохранения энергии (5.4.27) и заменяя сумму $\frac{\nu}{\nu_1} + \frac{\nu_1}{\nu}$ на двойку (поскольку значения ν и ν_1 близки), получаем формулу (5.4.26).

Список литературы

1. Бендриков Г., Буховцев Б., Керженцев В., Мякишев Г. Физика. Сборник задач. — М.: Айри-пресс, 2000.
2. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах: учеб. пособие. — 3-е изд. — МЦНМО, СПб.: Петроглиф, 2008.
3. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы. — СПб.: Лань, 1999.
4. Буховцев Б.Б., Кривченко В.Д., Мякишев Г.Я., Шальнов В.П. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1968.
5. Воробьев И.И., Зубков П.И. и др. Задачи по физике / Под ред. О.Я. Савченко. — М.: Наука, 1988.
6. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высшая школа, 1978
7. Зубов В.Г., Шальнов В.П. Задачи по физике. — М.: Высшая школа, 1985
8. Кондратьев А.С. Физические задачи в системе школьного образования. // Тез. докл. ФССО-91. — Л.: 1991.
9. Кондратьев А.С., Прияткин Н.А. Современные технологии обучения физике: Учеб. пособие. — СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2006.
10. Кондратьев А.С., Уздин В.М. Физика. Сборник задач. — М.: Физматлит, 2005.
11. Кондратьев А.С., Филиппов М.Э. Физические задачи и математическое моделирование реальных процессов: учебно-методическое пособие для учителя. — СПб.: ГРПУ им. А.И. Герцена, 2001.
12. Манида С.Н. Физика. Решение задач повышенной сложности. — СПб.: СПб университет, 2009.
13. Л.П. Баканина, В.Е. Белонучкин, С.М. Козел, И.П. Мазанько Сборник задач по физике: учеб. пособие / Под ред. С.М.Козела. — М.: Наука, 1990.
14. Школа решения олимпиадных задач. Часть 1. — СПб.: Университетская гимназия, 2008
15. Школа решения олимпиадных задач. Часть 2. — СПб.: Университетская гимназия, 2009

Учебное издание

*КОНДРАТЬЕВ Александр Сергеевич
ЛАРЧЕНКОВА Людмила Анатольевна
ЛЯПЦЕВ Александр Викторович*

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Оригинал-макет: *Е.В. Макеев*
Оформление переплета: *М.В. Кулага*

Подписано в печать 10.07.2012. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 19,5. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП «ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1365-6

